体験統計学

～第9回～

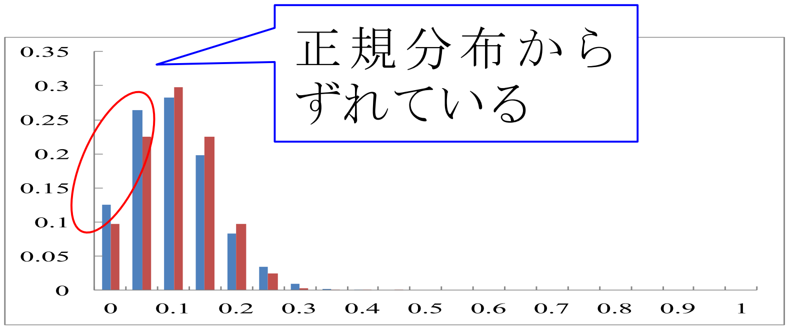
本稿のWebページ

古橋　武

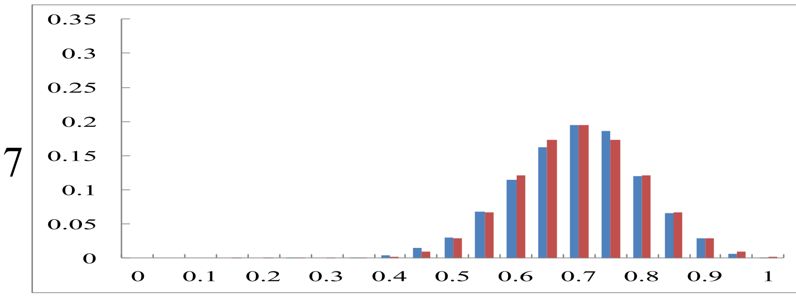
小テスト8.1　解答

マウスの数 $n = 20$ として，投与実験を5000組繰り返すとする．薬の真の有効率 p_0 を0.1, 0.2, ….,0.9と変えたとき，薬の有効率の頻度が正規分布に近い形であるのはp_0がどの範囲にあるときかを確認せよ．

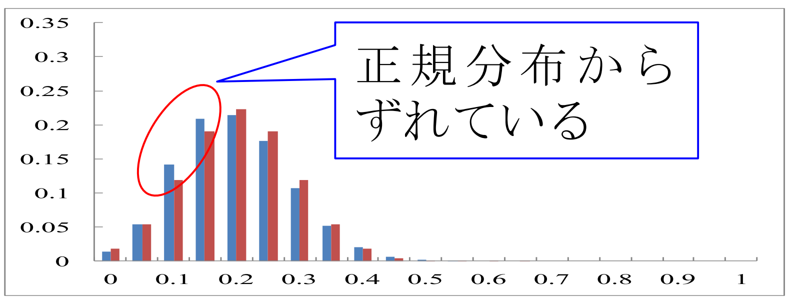
$p_0 = 0.1$



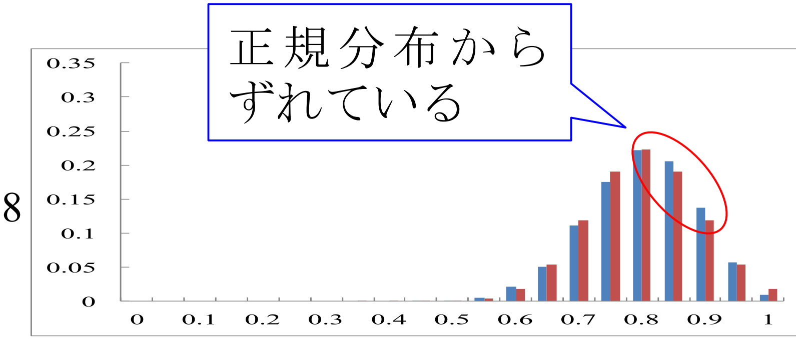
$p_0 = 0.7$



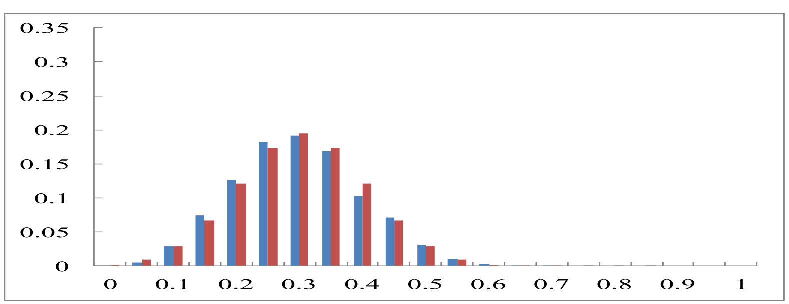
$p_0 = 0.2$



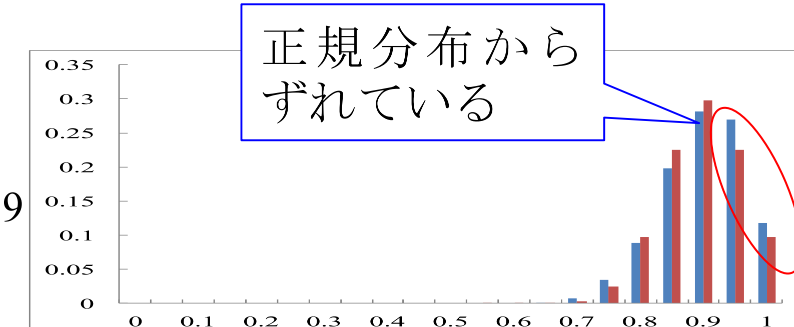
$p_0 = 0.8$



$p_0 = 0.3$



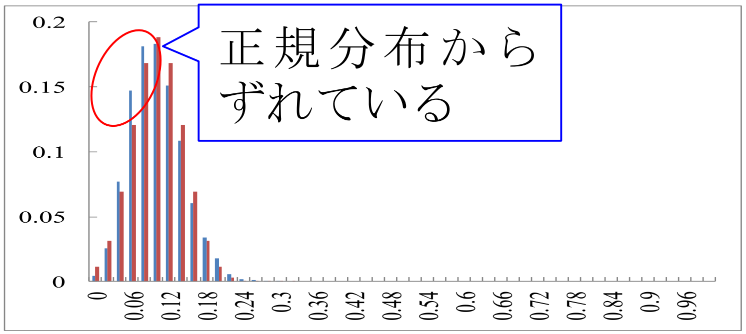
$p_0 = 0.9$



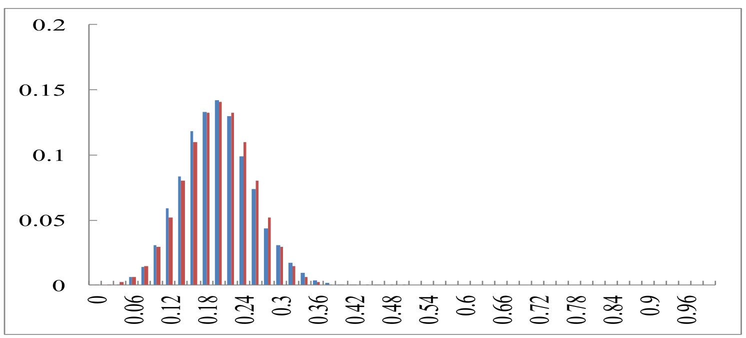
小テスト8.2　解答

マウスの数 $n = 50$ として，投与実験を5000組繰り返すとする．薬の真の有効率 p_0 を0.1, 0.2, ….,0.9と変えたとき，薬の有効率の頻度が正規分布に近い形であるのはp_0がどの範囲にあるときかを確認せよ．

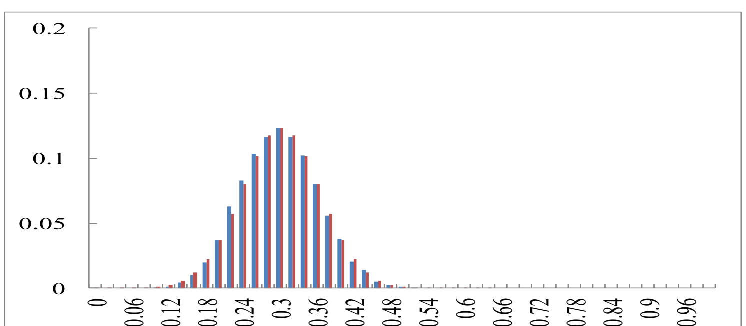
$p_0 = 0.1$



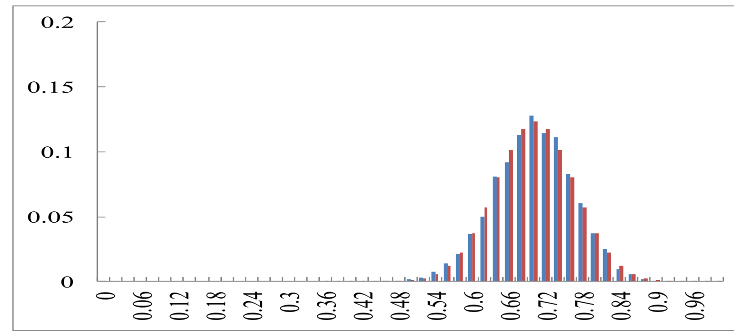
$p_0 = 0.2$



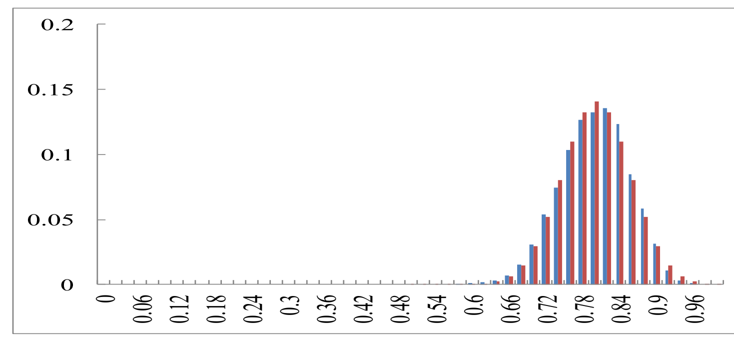
$p_0 = 0.3$



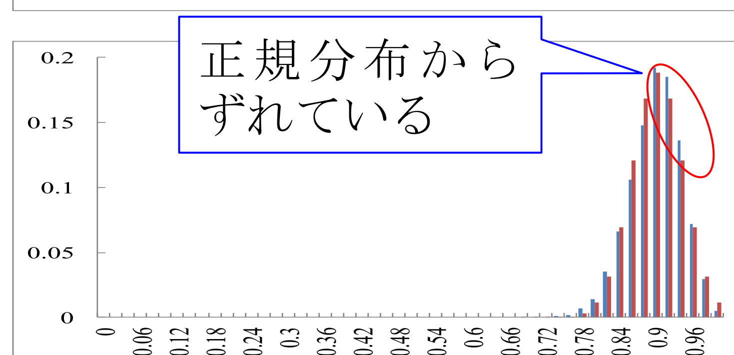
$p_0 = 0.7$



$p_0 = 0.8$



$p_0 = 0.9$



$n = 20$ のとき薬の有効率p は真の有効率p_0が

の範囲にあるときほぼ正規分布と見なせる.

$n = 50$ のとき薬の有効率p は真の有効率p_0が

の範囲にあるときほぼ正規分布と見なせる.

$n=20$ のとき薬の有効率p は真の有効率p_0が

$$\boxed{0.3 \leq p_0 \leq 0.7}$$

の範囲にあるときほぼ正規分布と見なせる.

$n=50$ のとき薬の有効率p は真の有効率p_0が

の範囲にあるときほぼ正規分布と見なせる.

$n=20$ のとき薬の有効率p は真の有効率p_0が

$$0.3 \leq p_0 \leq 0.7$$

の範囲にあるときほぼ正規分布と見なせる.

$n=50$ のとき薬の有効率p は真の有効率p_0が

$$\boxed{0.2 \leq p_0 \leq 0.8}$$

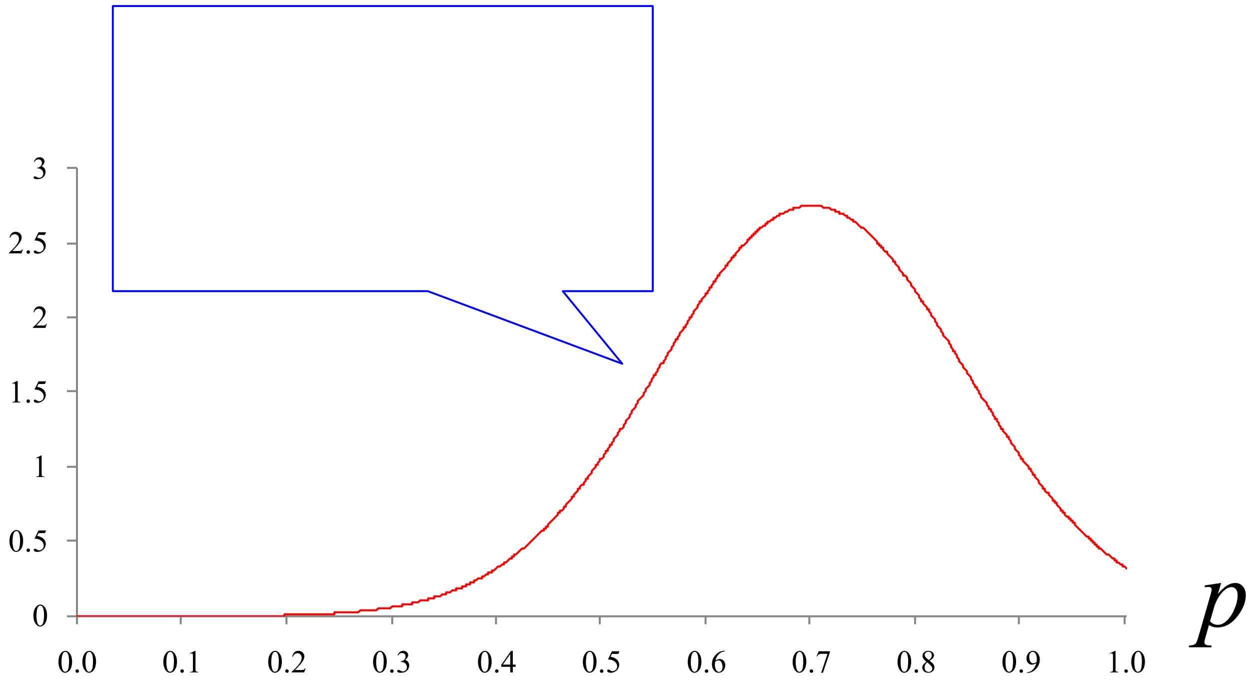
の範囲にあるときほぼ正規分布と見なせる.

有効率の区間推定

n匹のマウスへの薬の有効率 p の理論平均： p_0

理論分散：$\sigma^2 = p_0(1 - p_0)/n$

の正規分布となった.

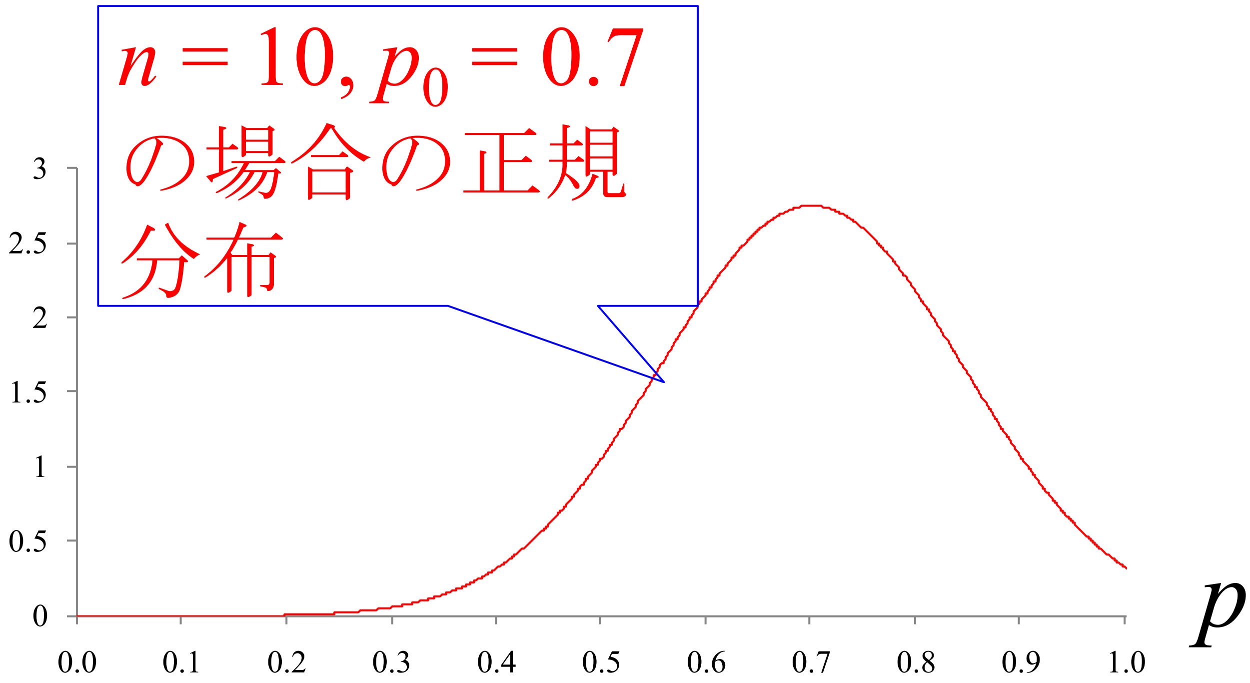


有効率の区間推定

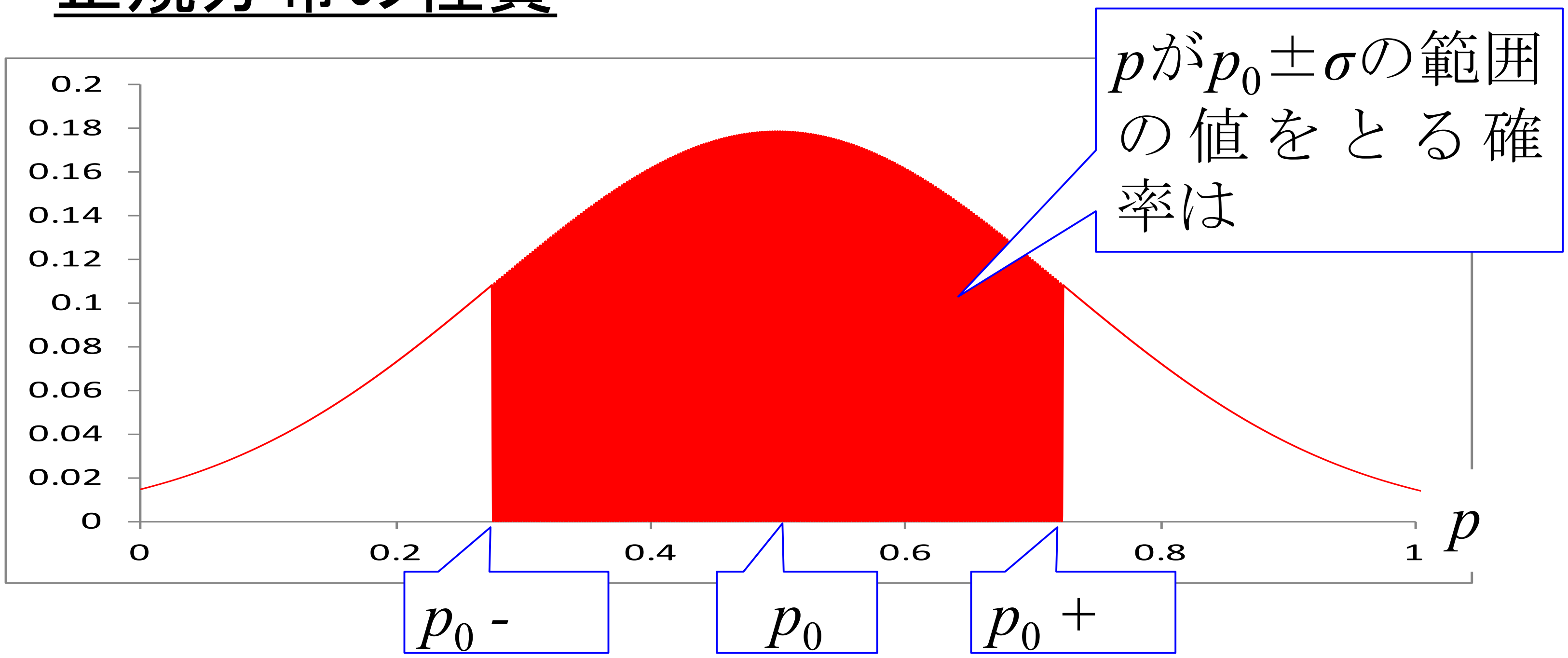
n匹のマウスへの薬の有効率 p の理論平均： p_0

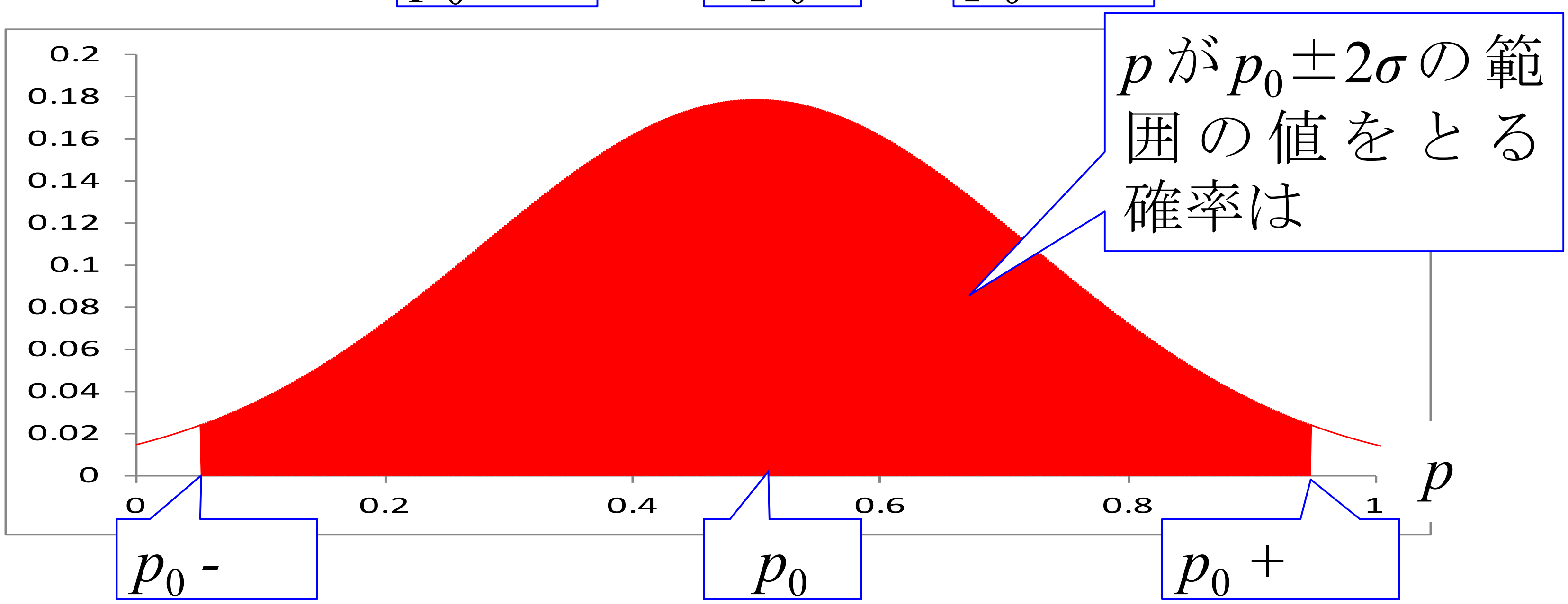
理論分散：$\sigma^2 = p_0(1 - p_0)/n$

の正規分布となった.

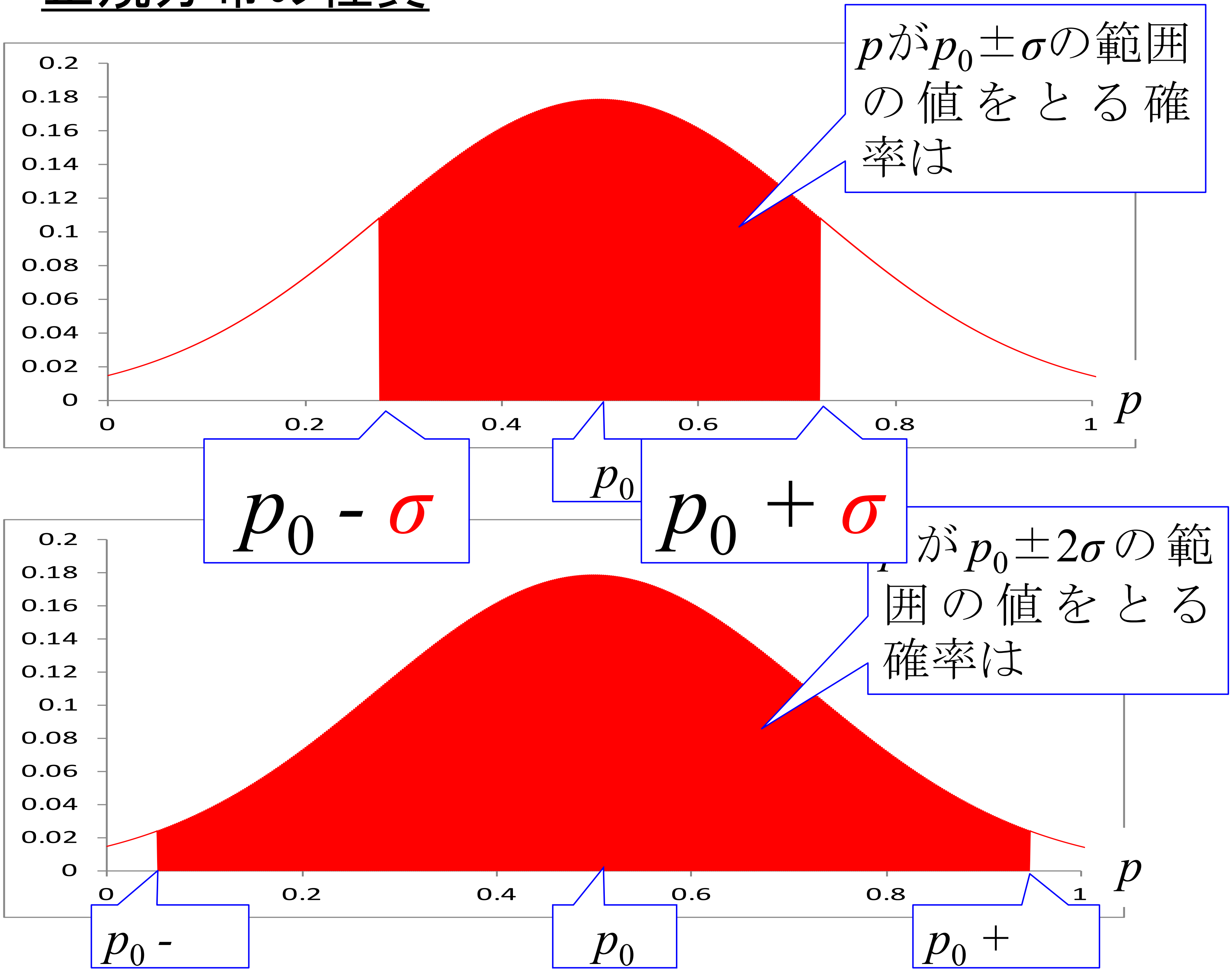


正規分布の性質


0.2
0.18
0.16
0.14
0.12
0.1
0.08
0.06
0.04
0.02
0
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
p
pがp0±σの範囲の値をとる確率は
p0 -
p0
p0 +

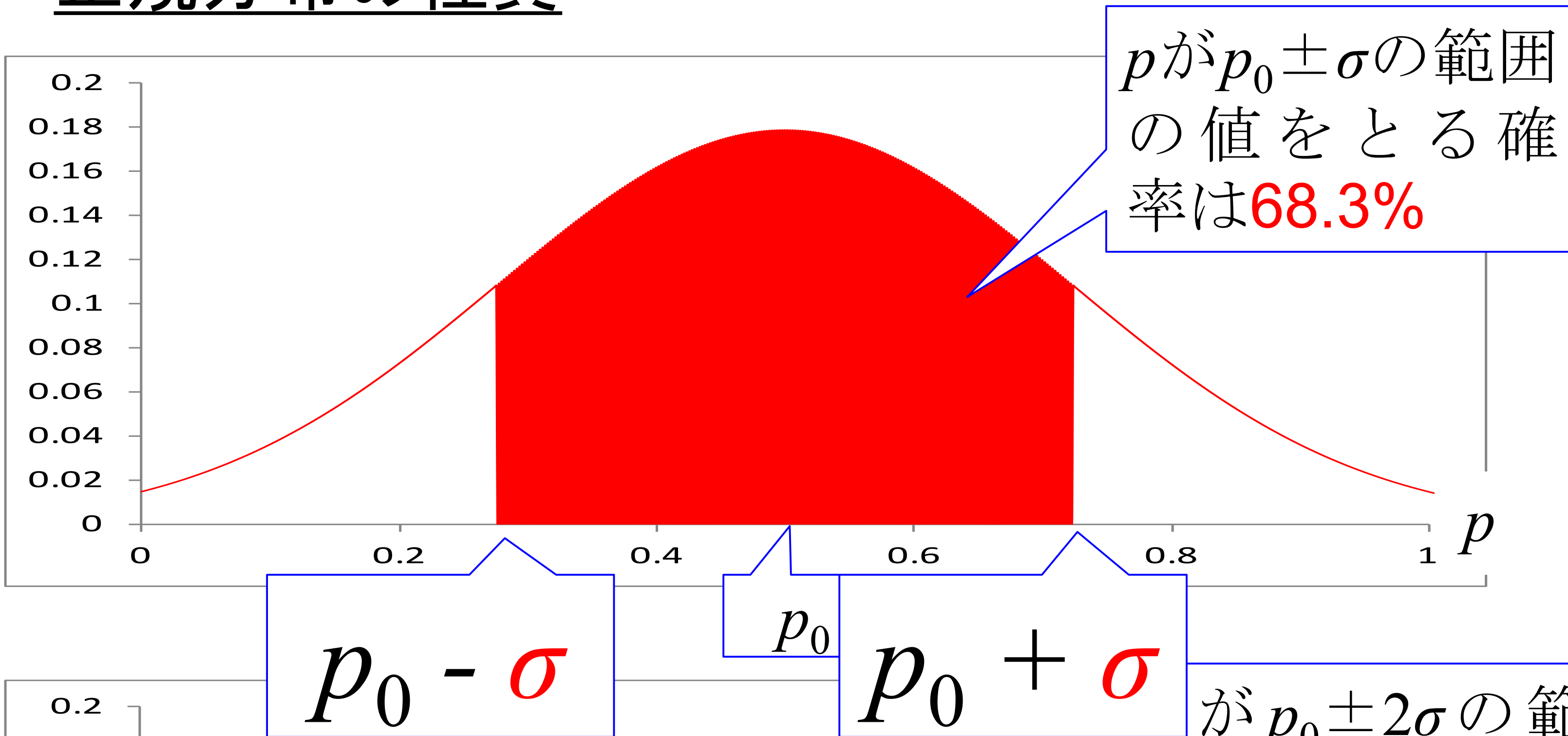

0.2
0.18
0.16
0.14
0.12
0.1
0.08
0.06
0.04
0.02
0
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
p
pがp0±2σの範囲の値をとる確率は
p0 -
p0
p0 +

正規分布の性質

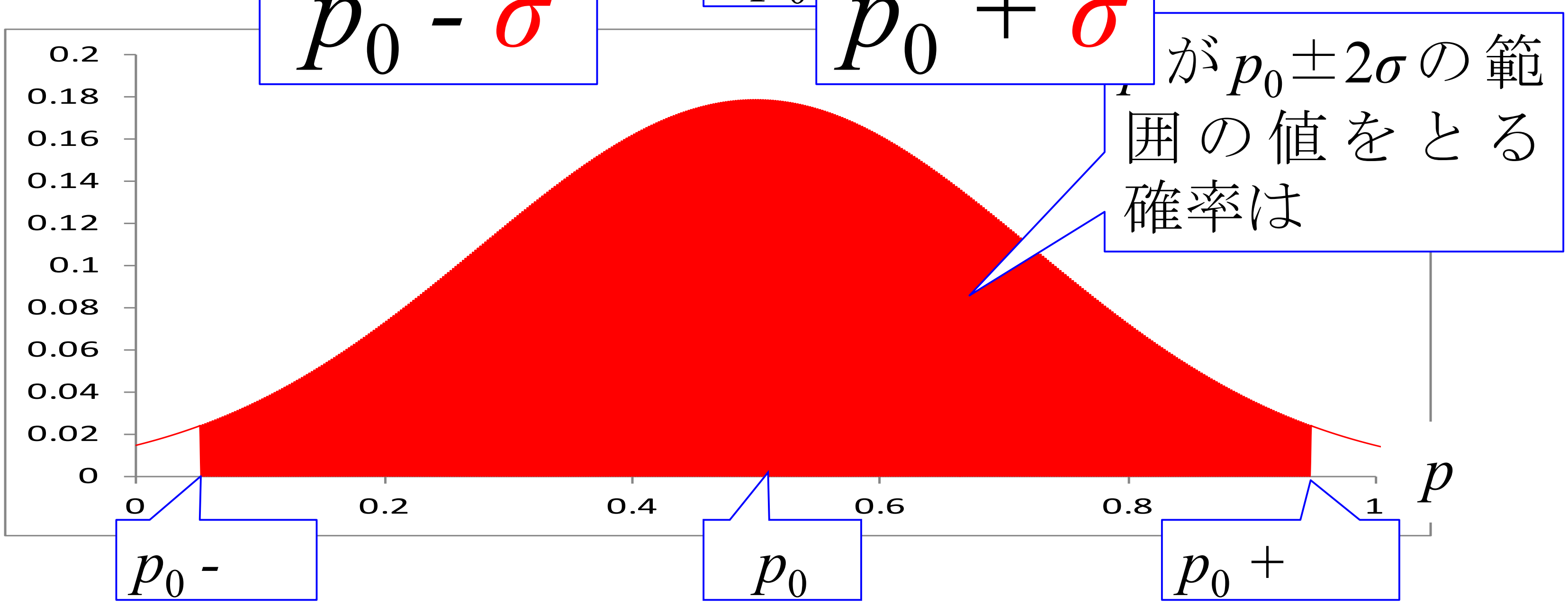


pが$p_0\pm\sigma$の範囲の値をとる確率は
p_0 - σ
p_0
$p_0+\sigma$
pが$p_0\pm 2\sigma$の範囲の値をとる確率は
p_0 -
p_0
p_0 +
p
0 0.02 0.04 0.06 0.08 0.1 0.12 0.14 0.16 0.18 0.2
0 0.2 0.4 0.6 0.8 1

正規分布の性質

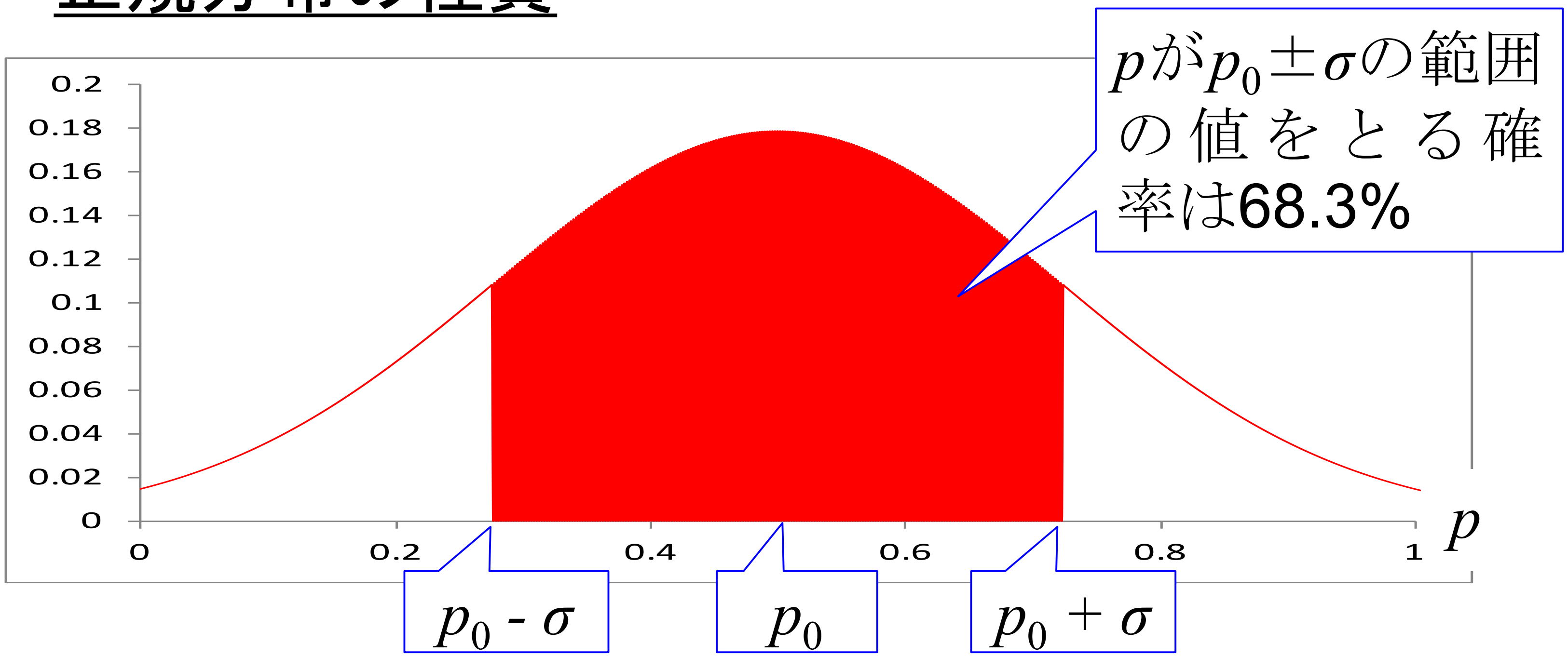


0.2
0.18
0.16
0.14
0.12
0.1
0.08
0.06
0.04
0.02
0
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
p
pが$p_0 \pm \sigma$の範囲の値をとる確率は68.3%
p_0 - σ
p_0
$p_0 + \sigma$

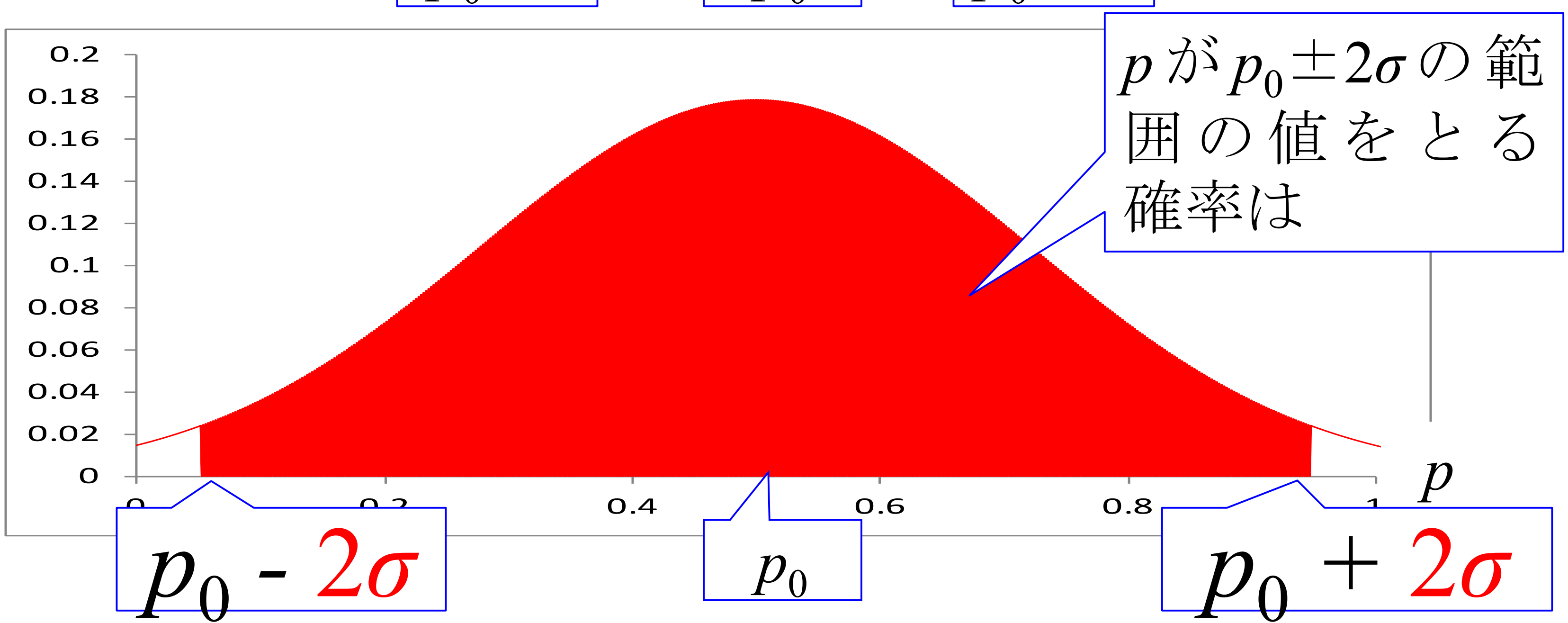


0.2
0.18
0.16
0.14
0.12
0.1
0.08
0.06
0.04
0.02
0
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
p
pが$p_0 \pm 2\sigma$の範囲の値をとる確率は
p_0 -
p_0
$p_0 +$

正規分布の性質

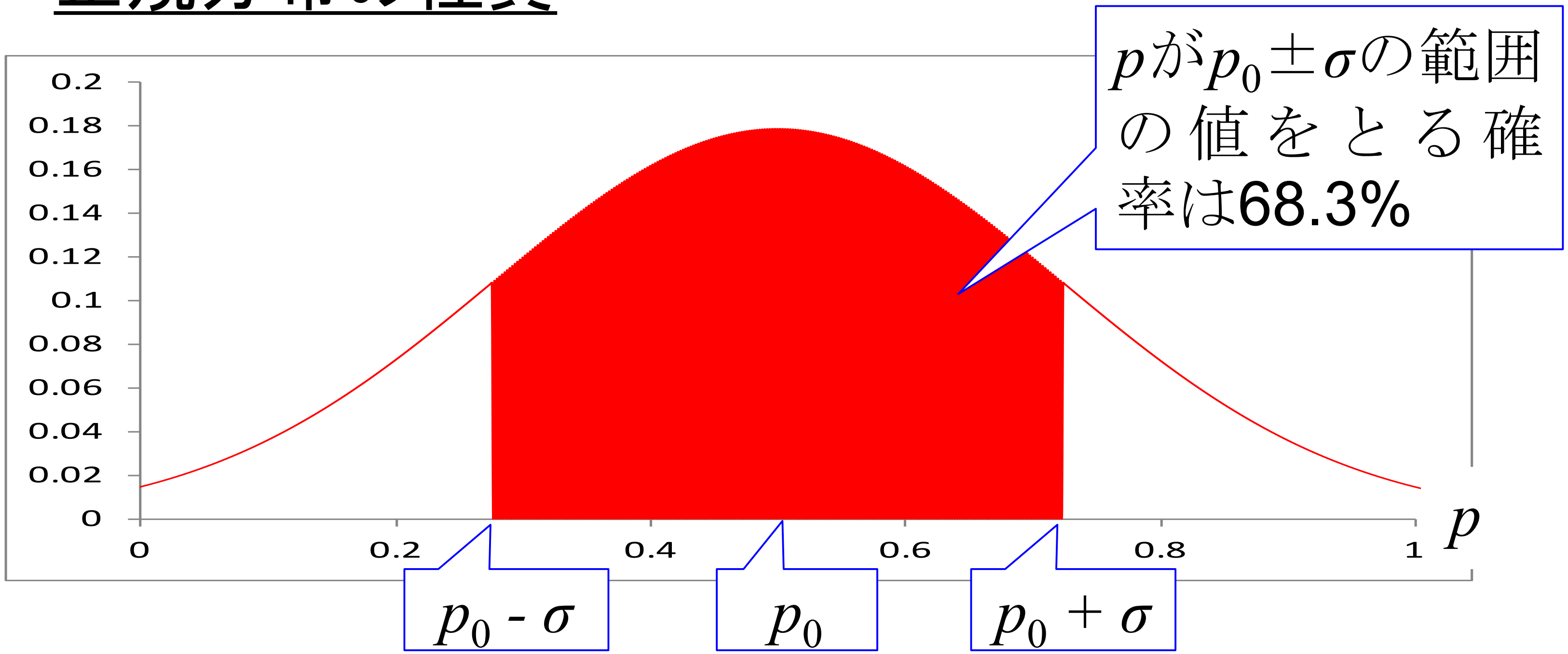


pが$p_0 \pm \sigma$の範囲の値をとる確率は68.3%
0.2
0.18
0.16
0.14
0.12
0.1
0.08
0.06
0.04
0.02
0
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
p
$p_0 - \sigma$
p_0
$p_0 + \sigma$

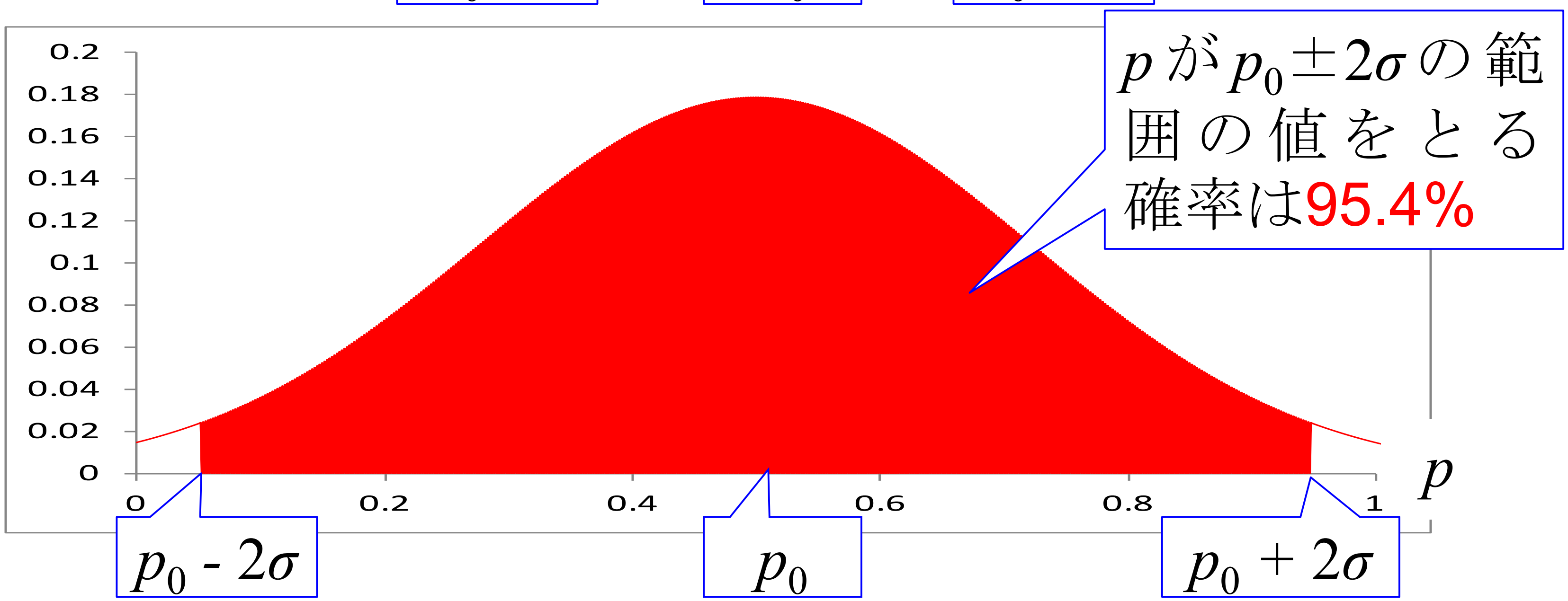


pが$p_0 \pm 2\sigma$の範囲の値をとる確率は
0.2
0.18
0.16
0.14
0.12
0.1
0.08
0.06
0.04
0.02
0
0.4
0.6
0.8
p
$p_0 - 2\sigma$
p_0
$p_0 + 2\sigma$

正規分布の性質

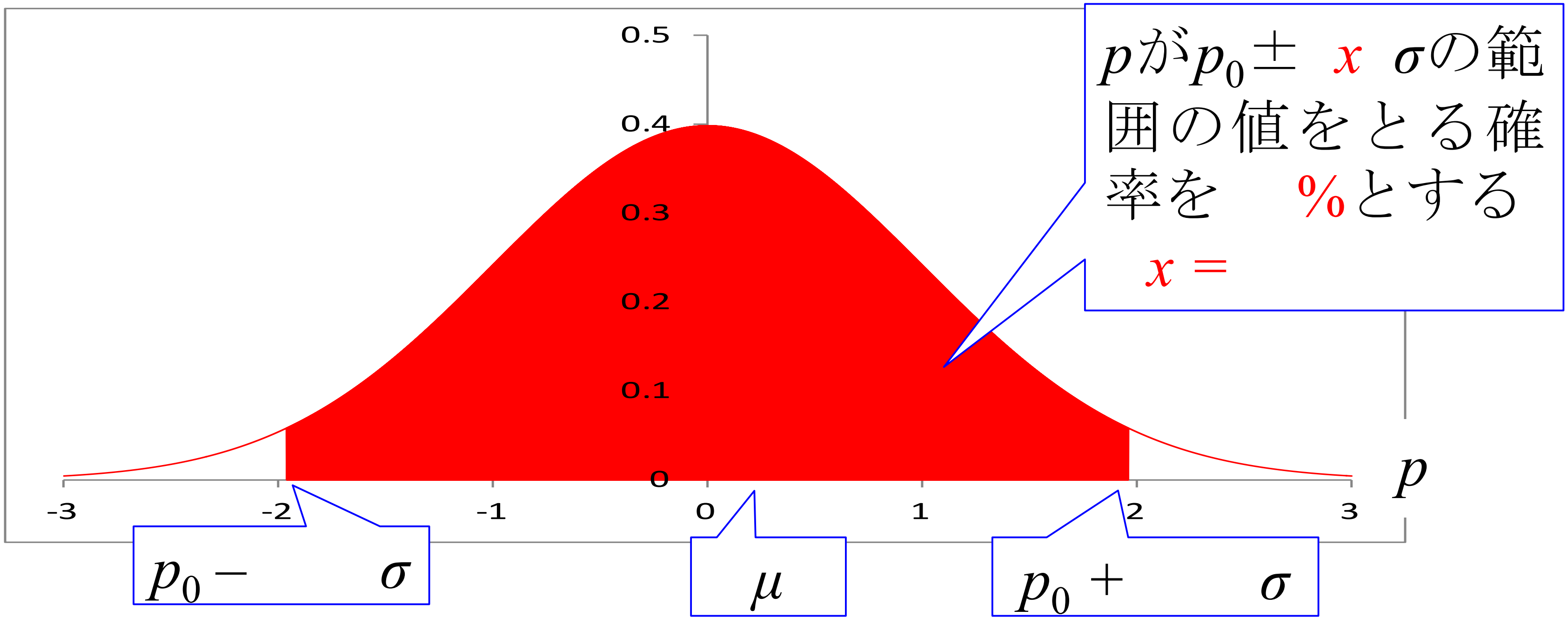


0.2
0.18
0.16
0.14
0.12
0.1
0.08
0.06
0.04
0.02
0
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
p
pが$p_0 \pm \sigma$の範囲の値をとる確率は68.3%
p_0 - σ
p_0
$p_0 + \sigma$

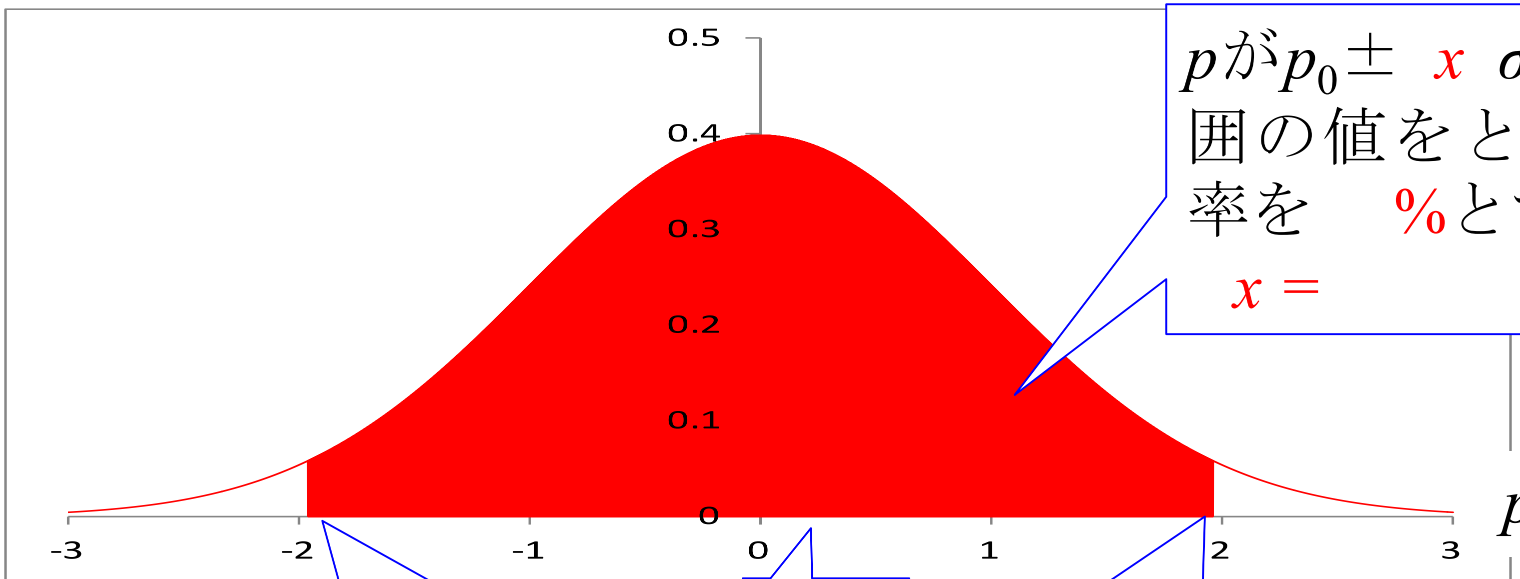


0.2
0.18
0.16
0.14
0.12
0.1
0.08
0.06
0.04
0.02
0
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
p
pが$p_0 \pm 2\sigma$の範囲の値をとる確率は95.4%
p_0 - 2σ
p_0
$p_0 + 2\sigma$

正規分布の性質


0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
-3
-2
-1
0
1
2
3
p
pが$p_0 \pm\ x\ \sigma$の範囲の値をとる確率を　%とする
$x =$
$p_0 -\quad \sigma$
μ
$p_0 +\quad \sigma$

正規分布の性質



pが$p_0 \pm$ x σの範囲の値をとる確率を %とする

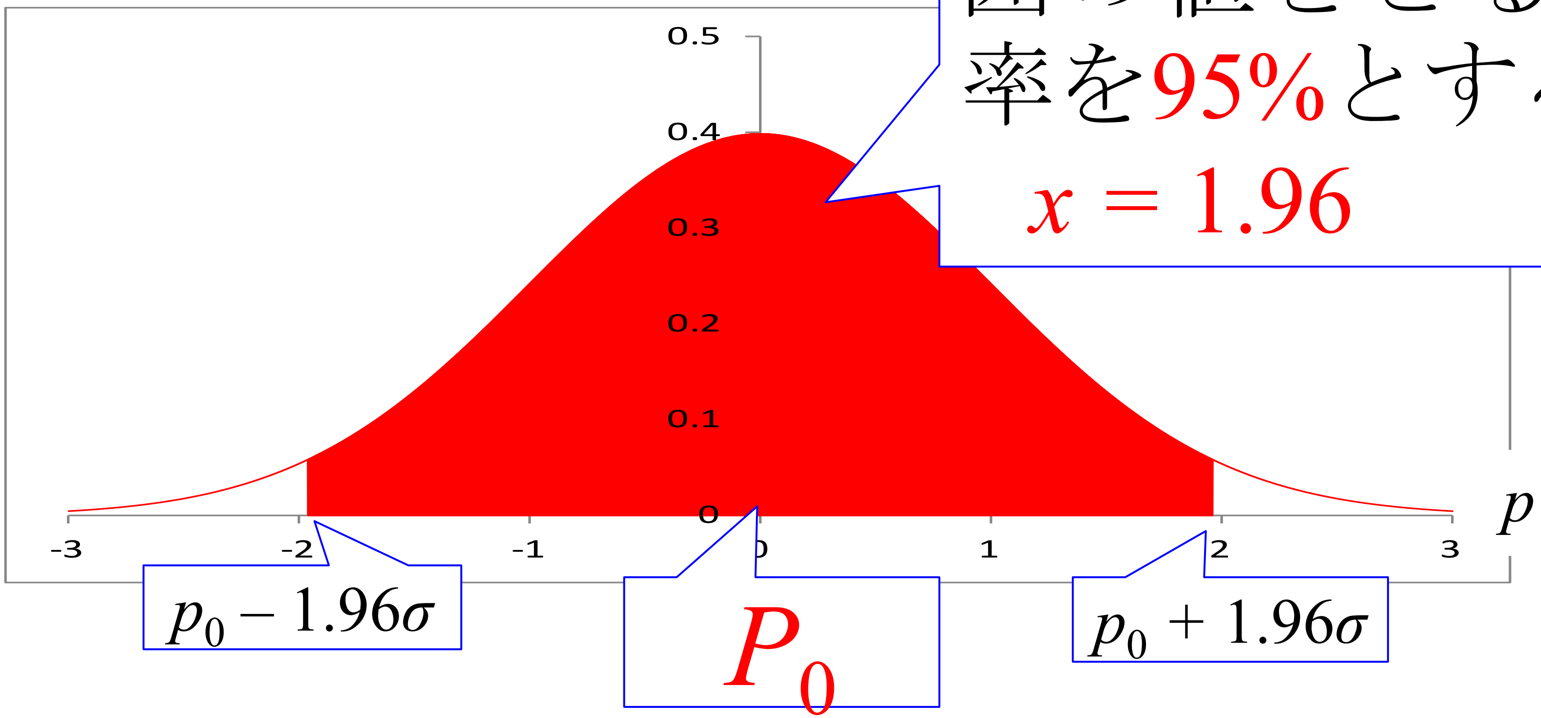
$x =$

μ

$p_0 - 1.96\sigma$

$p_0 + 1.96\sigma$

正規分布の性質



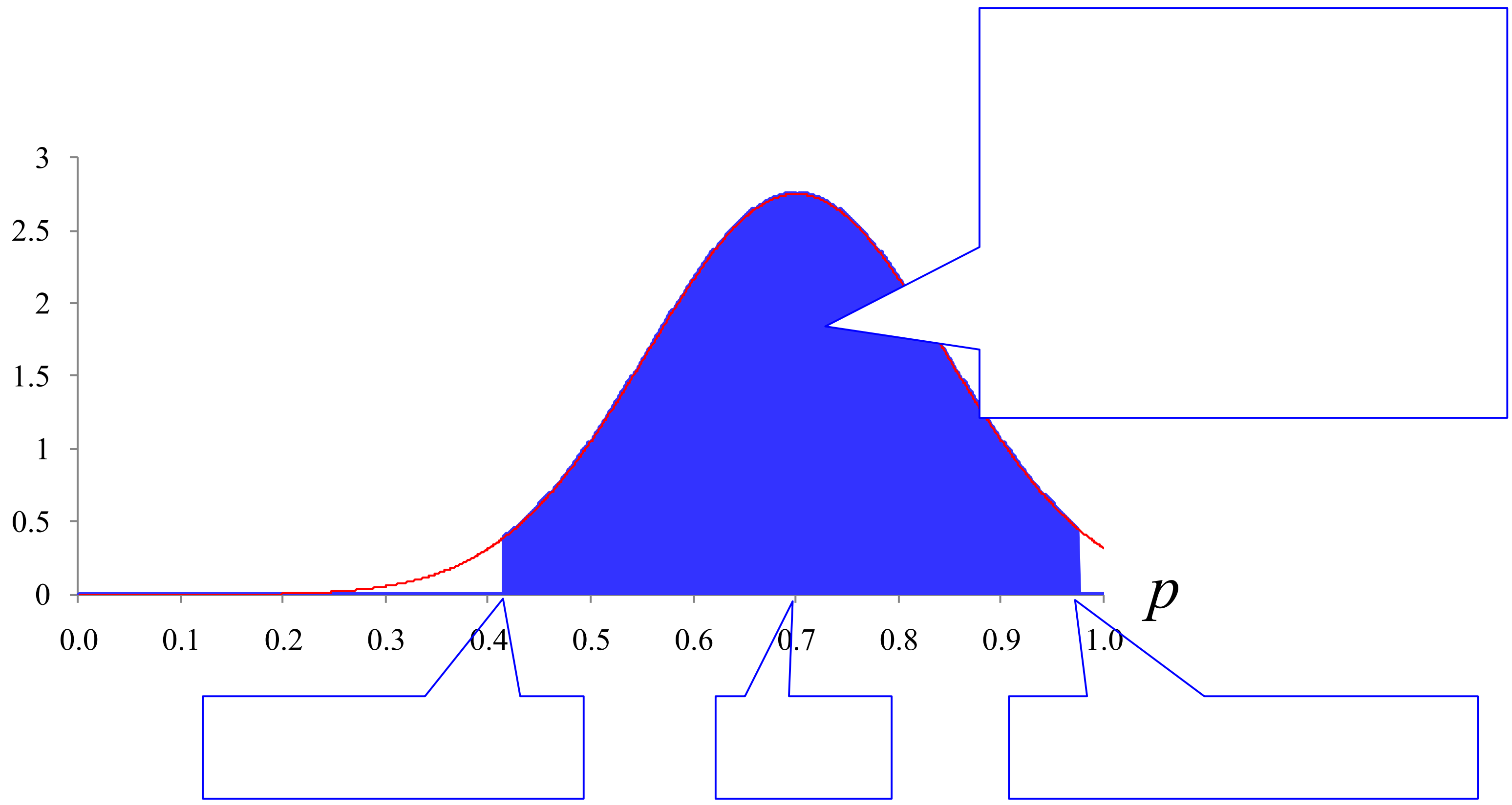
pが$p_0 \pm\ x\ \sigma$の範囲の値をとる確率を95%とする

$x = 1.96$

有効率の区間推定

n匹のマウスへの薬の有効率 p の理論平均： p_0

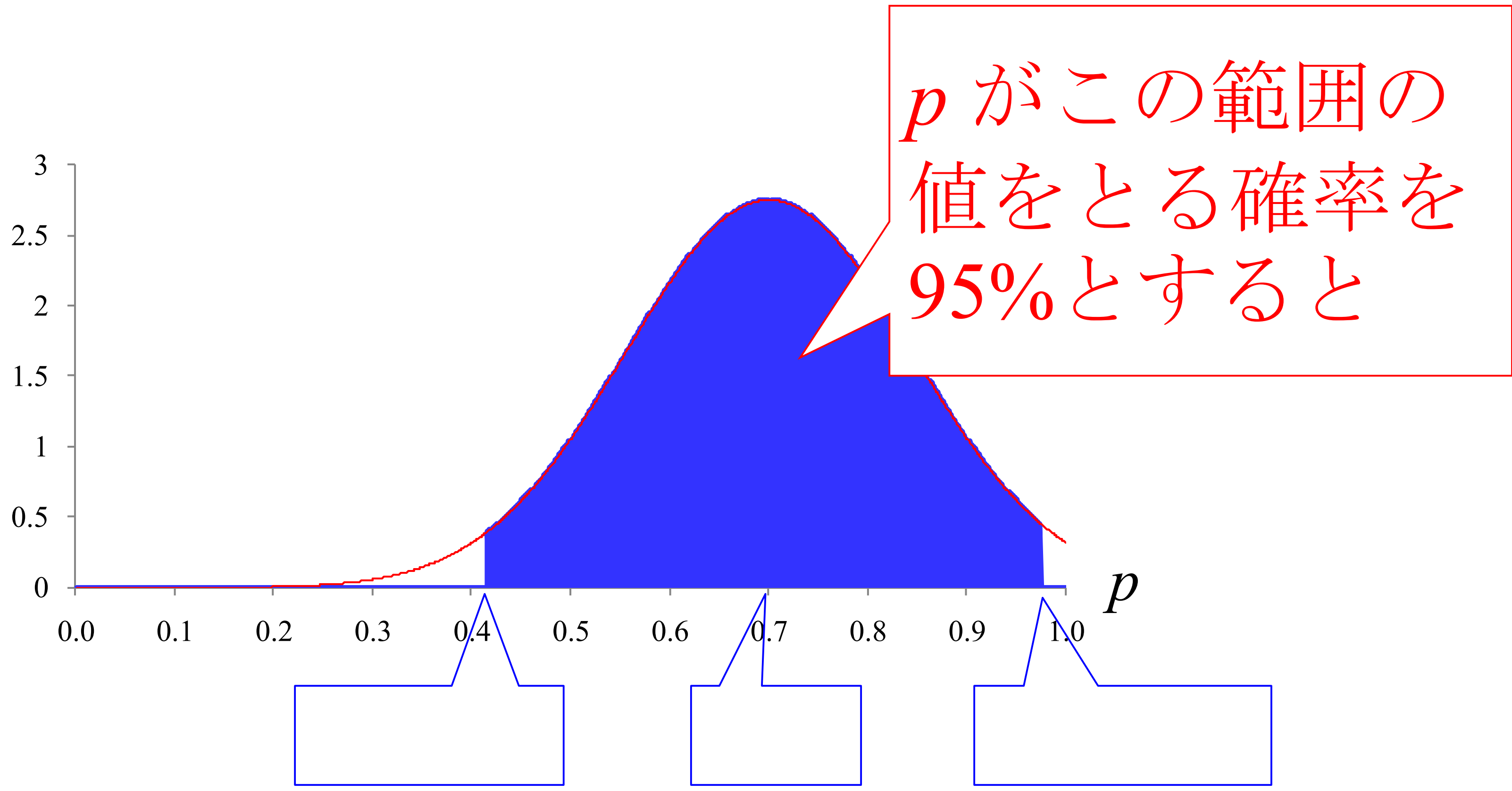
理論分散： $\sigma^2 = p_0(1-p_0)/n$ の正規分布となった.



有効率の区間推定

n匹のマウスへの薬の有効率 p の理論平均： p_0

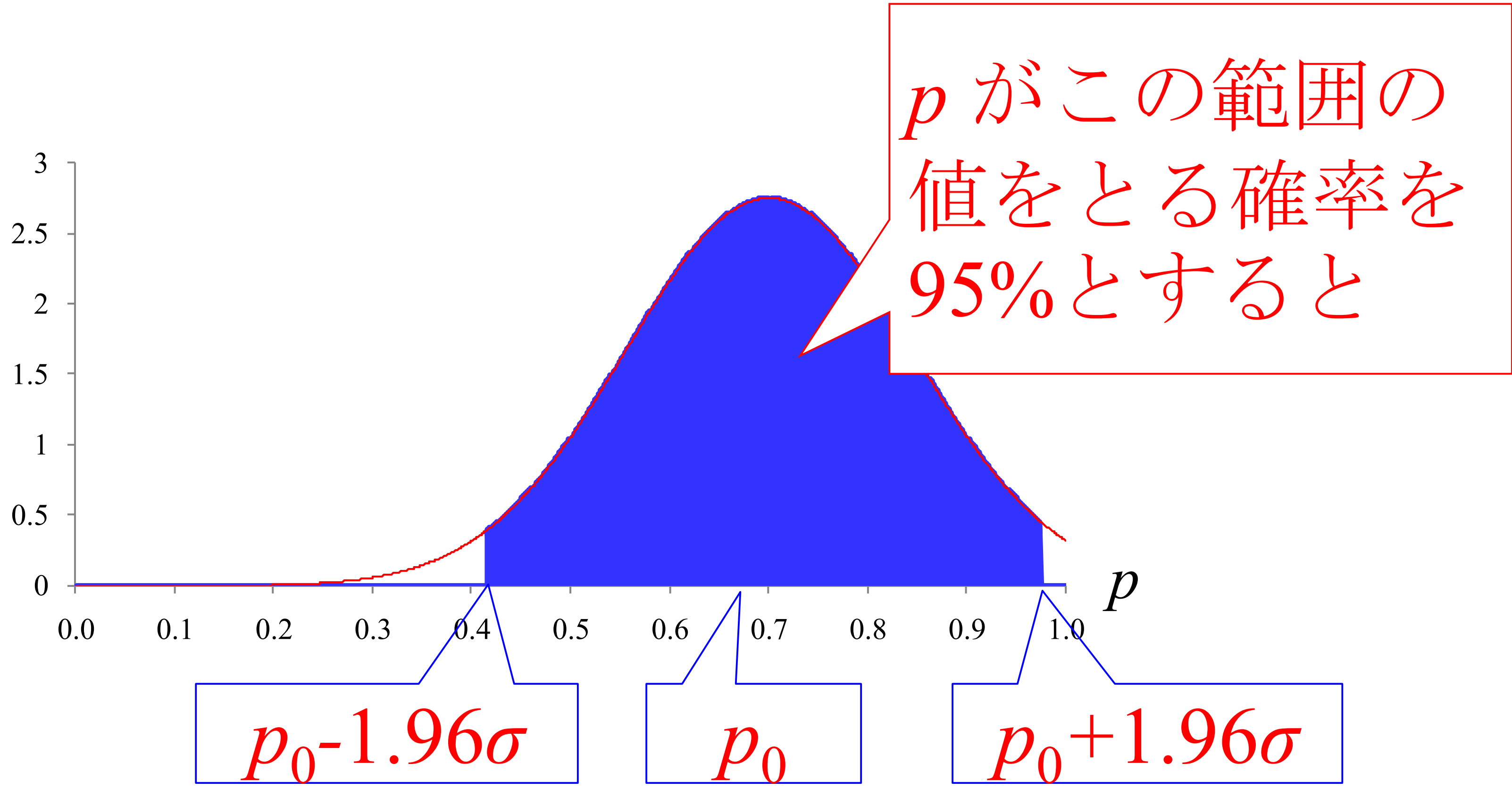
理論分散： $\sigma^2 = p_0(1-p_0)/n$ の正規分布となった.



有効率の区間推定

n匹のマウスへの薬の有効率 p の理論平均： p_0

理論分散： $\sigma^2 = p_0(1-p_0)/n$ の正規分布となった.



有効率の区間推定

すなわち，p が

の範囲内の値をとる確率は95%である．この式を変形すると

$$p_0 - 1.96\sigma \le p$$

$$p \le p_0 + 1.96\sigma$$

よって，真の有効率 p_0 が

の範囲内にある確率が95%である．　　と呼ぶ.

上式でσが分かれば，有効率の95%信頼区間を求められる．

すなわち，p が

$$\boxed{p_0 - 1.96\sigma \le p \le p_0 + 1.96\sigma}$$

の範囲内の値をとる確率は95%である．この式を変形すると

$$p_0 - 1.96\sigma \le p \quad \Rightarrow$$

$$p \le p_0 + 1.96\sigma \quad \Rightarrow$$

よって，真の有効率 p_0 が

の範囲内にある確率が95%である．$\Rightarrow$ と呼ぶ.

上式で$\boldsymbol{\sigma}$が分かれば，有効率の95%信頼区間を求められる．

すなわち，p が

$$p_0 - 1.96\sigma \le p \le p_0 + 1.96\sigma$$

の範囲内の値をとる確率は95%である．この式を変形すると

$p_0 - 1.96\sigma \le p$ ➡

$p \le p_0 + 1.96\sigma$ ➡

$$\boxed{\begin{array}{l} p_0 \le p + 1.96\sigma \\ p - 1.96\sigma \le p_0 \end{array}}$$

よって，真の有効率 p_0 が

の範囲内にある確率が95%である． ➡ と呼ぶ．

上式でσが分かれば，有効率の95%信頼区間を求められる．

すなわち，p が

$$p_0 - 1.96\sigma \le p \le p_0 + 1.96\sigma$$

の範囲内の値をとる確率は95%である．この式を変形すると

$p_0 - 1.96\sigma \le p$ ➡ $$p^* \le \bar{x} + 1.96\sigma$$

$p \le p_0 + 1.96\sigma$ ➡ $$\bar{x} - 1.96\sigma \le p^*$$

よって，真の有効率 p_0 が

$$\boxed{p - 1.96\sigma \le p_0 \le p + 1.96\sigma}$$

の範囲内にある確率が95%である． ➡ と呼ぶ．

上式でσが分かれば，有効率の95%信頼区間を求められる．

すなわち，p が

$$p_0 - 1.96\sigma \le p \le p_0 + 1.96\sigma$$

の範囲内の値をとる確率は95%である．この式を変形すると

$$p_0 - 1.96\sigma \le p \quad \Rightarrow \quad p^* \le \bar{x} + 1.96\sigma$$

$$p \le p_0 + 1.96\sigma \quad \Rightarrow \quad \bar{x} - 1.96\sigma \le p^*$$

よって，真の有効率 p_0 が

$$p - 1.96\sigma \le p_0 \le p + 1.96\sigma$$

の範囲内にある確率が95%である．➡ 95%信頼区間

と呼ぶ．

上式でσが分かれば，有効率の95%信頼区間を求められる．

有効率の区間推定

$$p - 1.96\sigma \le p_0 \le p + 1.96\sigma$$

ここで，理論分散　$\sigma^2 = p_0(1 - p_0)/n$

従って，理論標準偏差は両辺のルートをとって

有効率の区間推定

$$p - 1.96\sigma \le p_0 \le p + 1.96\sigma$$

ここで，理論分散　$\sigma^2 = p_0(1 - p_0)/n$

従って，理論標準偏差は両辺のルートをとって

$$\boxed{\sigma = \sqrt{p_0(1 - p_0)/n}}$$

しかし,

$$\sigma = \sqrt{p_0(1-p_0)/n}$$

においてp_0はもともと分からない値である.

どうしよう. ・・・・まてよ

薬の効き具合 p は

$$p \approx p_0$$

これだ！

により近似すればよい.

しかし,

$$\sigma = \sqrt{p_0(1-p_0)/n}$$

においてp_0はもともと分からない値である.

どうしよう. ・・・・まてよ

薬の効き具合 p は $\boxed{\text{マウスの数 } n \text{ を大きくすれば } p_0 \text{ に近づく.}}$

$$p \approx p_0$$

これだ！

により近似すればよい.

しかし,

$$\sigma = \sqrt{p_0(1-p_0)/n}$$

においてp_0はもともと分からない値である.

どうしよう．・・・・まてよ

薬の効き具合 p は マウスの数 n を大きくすれば p_0 に近づく.

$$p \approx p_0$$

これだ！ p_0をpでおきかえて，理論標準偏差σを

$$\hat{\sigma} = \sqrt{p(1-p)/(n-1)}$$

により近似すればよい.

n-1とする方が近似の精度がよい

真の有効率 p_0 は

$$p - 1.96\sqrt{p(1-p)/(n-1)} \le p_0 \le p + 1.96\sqrt{p(1-p)/(n-1)}$$

およそ95%の確率でこの範囲にある.

真の有効率 p_0 は

$$p - 1.96\sqrt{p(1-p)/(n-1)} \le p_0 \le p + 1.96\sqrt{p(1-p)/(n-1)}$$

およそ95%の確率でこの範囲にある.

この近似区間を**95%信頼区間**とする.

小テスト9.1

マウス10匹に対する投与実験を行い，薬の効き具合 p と薬の効き具合の標準偏差の近似値

$$\hat{\sigma} = \sqrt{p(1-p)/(n-1)}$$

を求めよ．これを5000組繰り返したときの p の平均値と $\hat{\sigma}$ の平均値を求めよ．

p の平均値が真の有効率 p_0 に近い値となり，

$\hat{\sigma}$ の平均値が真の標準偏差 $\boxed{\sigma = \sqrt{p_0(1-p_0)/n}}$ に近い値

となることを確認せよ．

小テスト9.2

今，10匹のマウスにある薬を投与して，6匹に効き目があった．真の有効率p_0の95%信頼区間を求めよ．

今，30匹のマウスにある薬を投与して，19匹に効き目があった．真の有効率p_0の95%信頼区間を求めよ．

2013年3月

著者：　古橋武
名古屋大学工学研究科計算理工学専攻
furuhashi@cse.nagoya-u.ac.jp