体験統計学

～第10回～

本稿のWebページ

古橋　武

小テスト9.1 解答

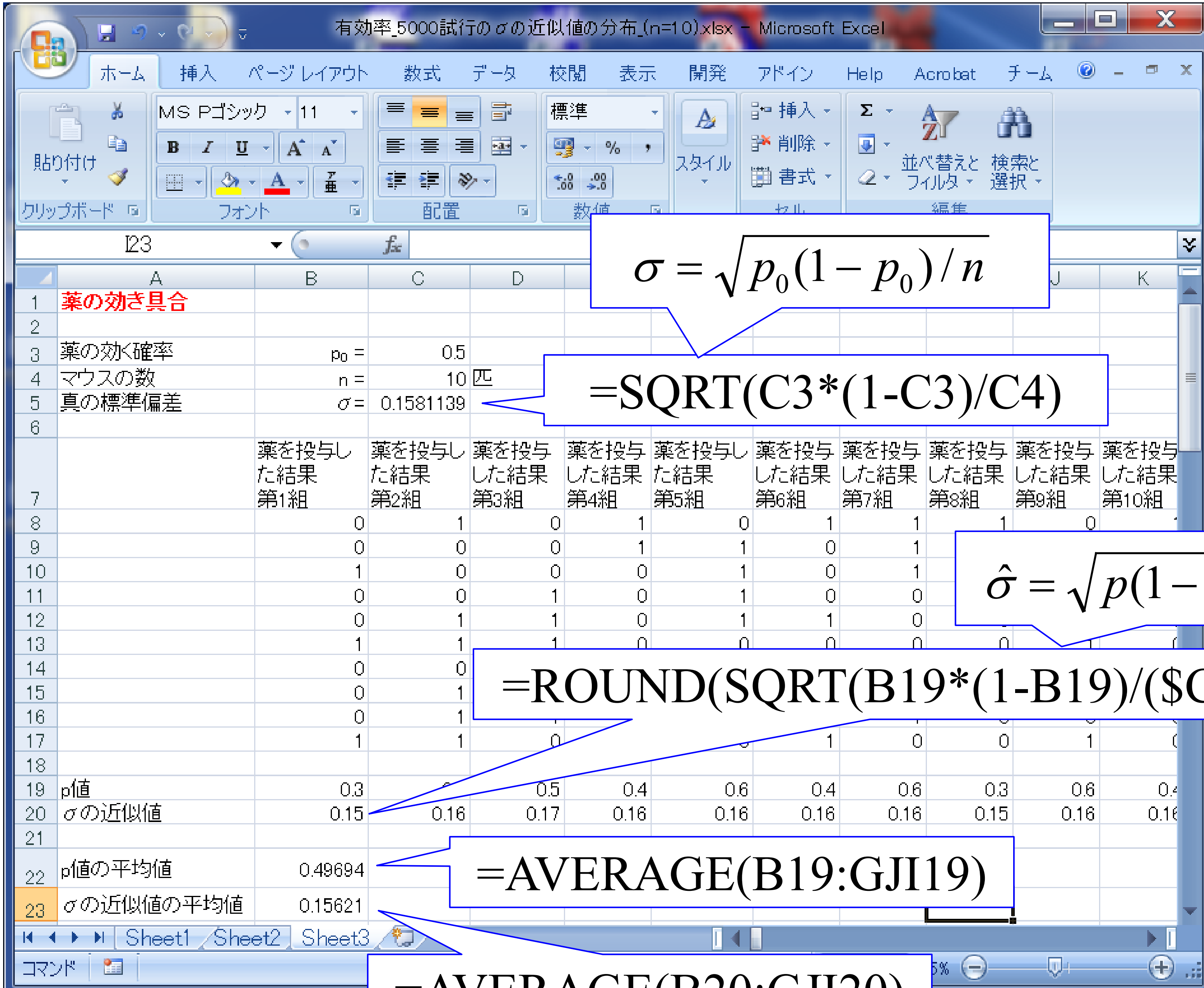
マウス10匹に対する投与実験を行い，薬の効き具合 p と薬の効き具合の標準偏差の近似値

$$\hat{\sigma} = \sqrt{p(1-p)/(n-1)}$$

を求めよ．これを5000回繰り返したときの p の平均値と $\hat{\sigma}$ の平均値を求めよ．

p の平均値が真の有効率 p_0 に近い値となり，

$\hat{\sigma}$ の平均値が真の標準偏差 $\boxed{\sigma = \sqrt{p_0(1-p_0)/n}}$ に近い値となることを確認せよ．



$$\sigma = \sqrt{p_0(1-p_0)/n}$$

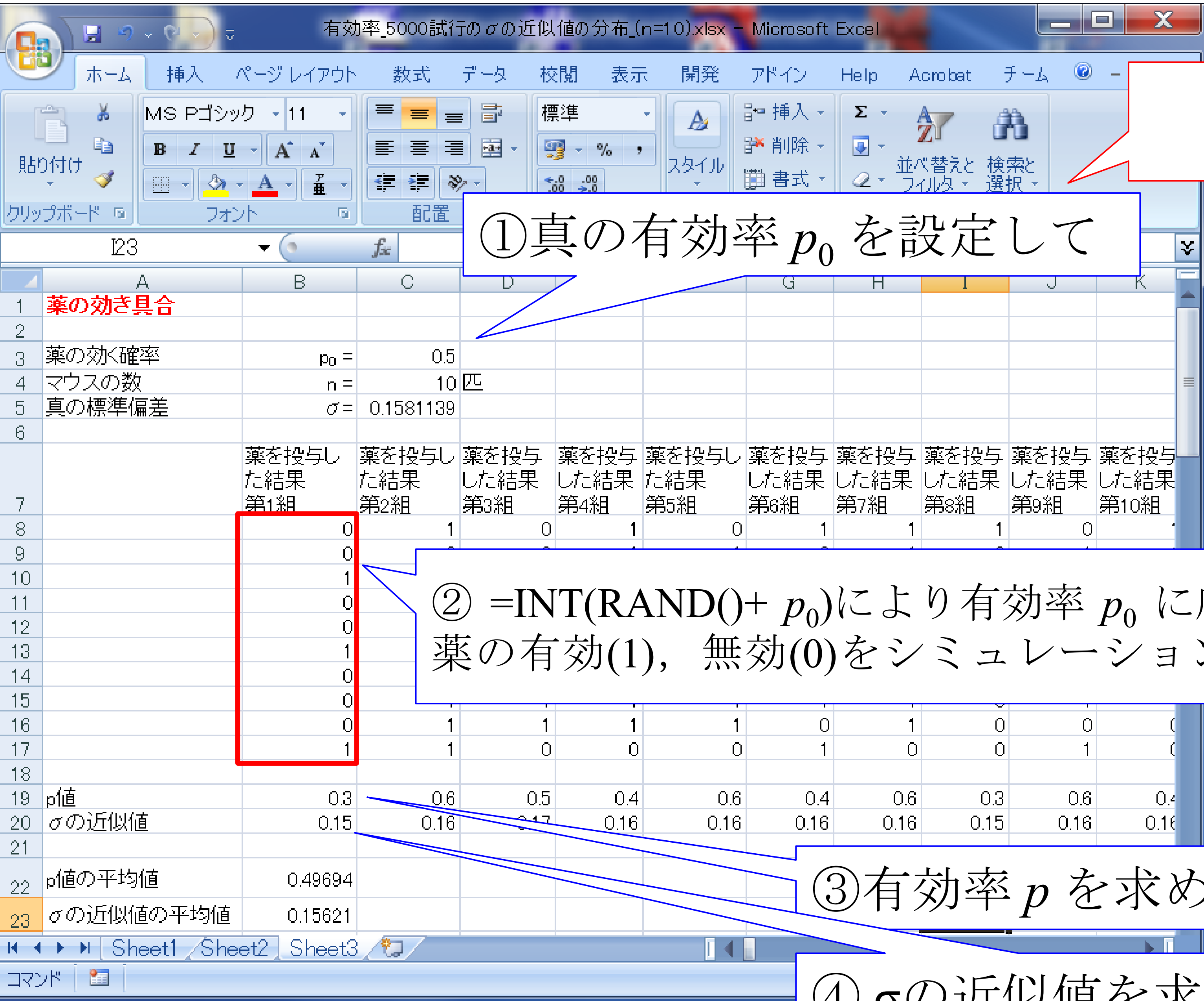
=SQRT(C3*(1-C3)/C4)

$$\hat{\sigma} = \sqrt{p(1-p)/(n-1)}$$

=ROUND(SQRT(B19*(1-B19)/(C4-1)),2)

=AVERAGE(B19:GJI19)

=AVERAGE(B20:GJI20)



①真の有効率 p_0 を設定して

② =INT(RAND()+ p_0)により有効率 p_0 に応じて薬の有効(1)，無効(0)をシミュレーションする．

③有効率 p を求める

④ σの近似値を求める

我々は

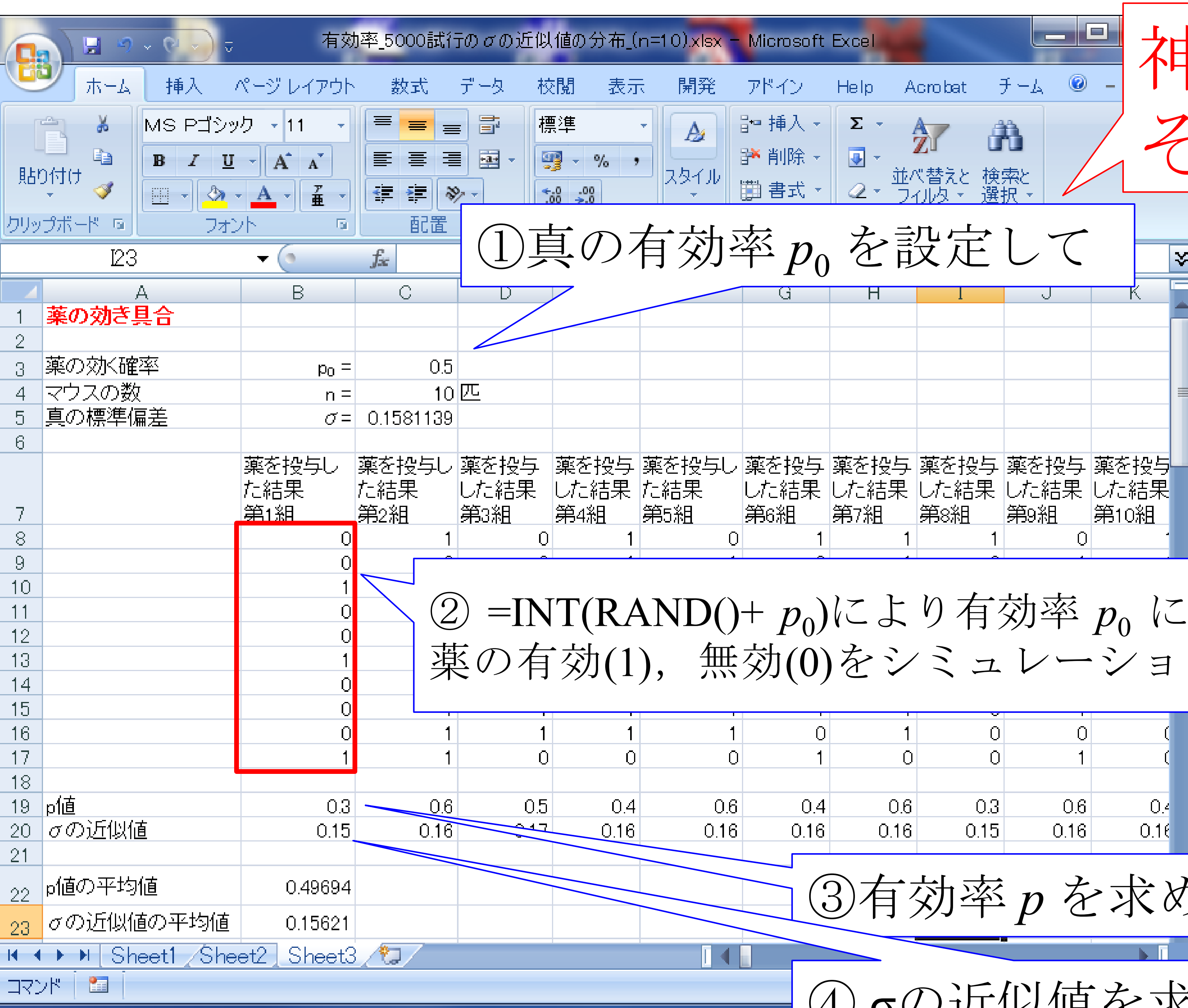
しかない．

神のみぞ知る

①真の有効率 p_0 を設定して

我々は

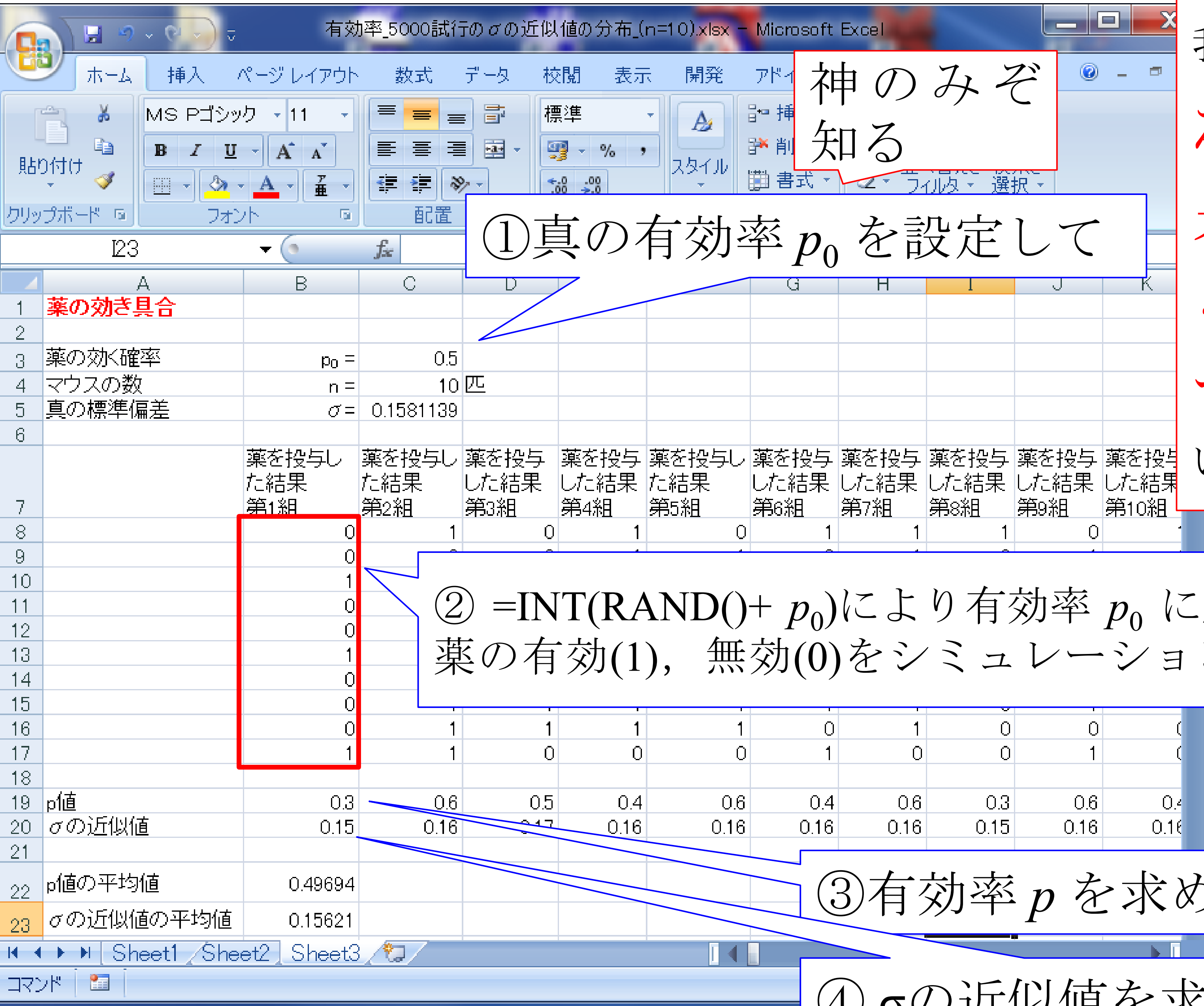
しかない．



② =INT(RAND()+ p_0)により有効率 p_0 に応じて薬の有効(1)，無効(0)をシミュレーションする．

③有効率 p を求める

④ σの近似値を求める



神のみぞ知る

①真の有効率 p_0 を設定して

② =INT(RAND()+ p_0)により有効率 p_0 に応じて薬の有効(1)，無効(0)をシミュレーションする.

③有効率 p を求める

④ σの近似値を求める

我々は**得られた結果からp_0を推定する**しかない.

小テスト9.2　解答

真の有効率 p_0 の 95%信頼区間

今，10匹のマウスにある薬を投与して，6匹に効き目があったとしよう

$$p-1.96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n-1}} \le p_0 \le p-1.96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n-1}}$$

$$\frac{6}{10}-1.96\sqrt{\frac{\frac{6}{10}\left(1-\frac{6}{10}\right)}{10-1}} \le p_0 \le \frac{6}{10}+1.96\sqrt{\frac{\frac{6}{10}\left(1-\frac{6}{10}\right)}{10-1}}$$

$$0.28 \le p_0 \le 0.92$$

小テスト9.2　解答　真の有効率 p_0 の 95%信頼区間

10匹のマウスにある薬を投与して，6匹に効き目があったとしよう

真の有効率は95%の確率で

$$0.28 < p_0 < 0.92$$

の間にある．

100匹のマウスにある薬を投与して，60匹に効き目があったとしよう

真の有効率は95%の確率で

$$0.503 < p_0 < 0.697$$

の間にある．

実験のサンプルサイズが大きくなると，信頼区間は狭まる．➡

小テスト9.2　解答　　真の有効率 p_0 の 95%信頼区間

10匹のマウスにある薬を投与して，6匹に効き目があったとしよう

真の有効率は95%の確率で

$$0.28 < p_0 < 0.92$$

の間にある．

100匹のマウスにある薬を投与して，60匹に効き目があったとしよう

真の有効率は95%の確

$$0.503 < p_0 < 0.697$$

の間にある．

実験のサンプルサイズが大きくなると，信頼区間は狭まる． ➡ 有効率の推定値の信頼度が高まる．

確率分布

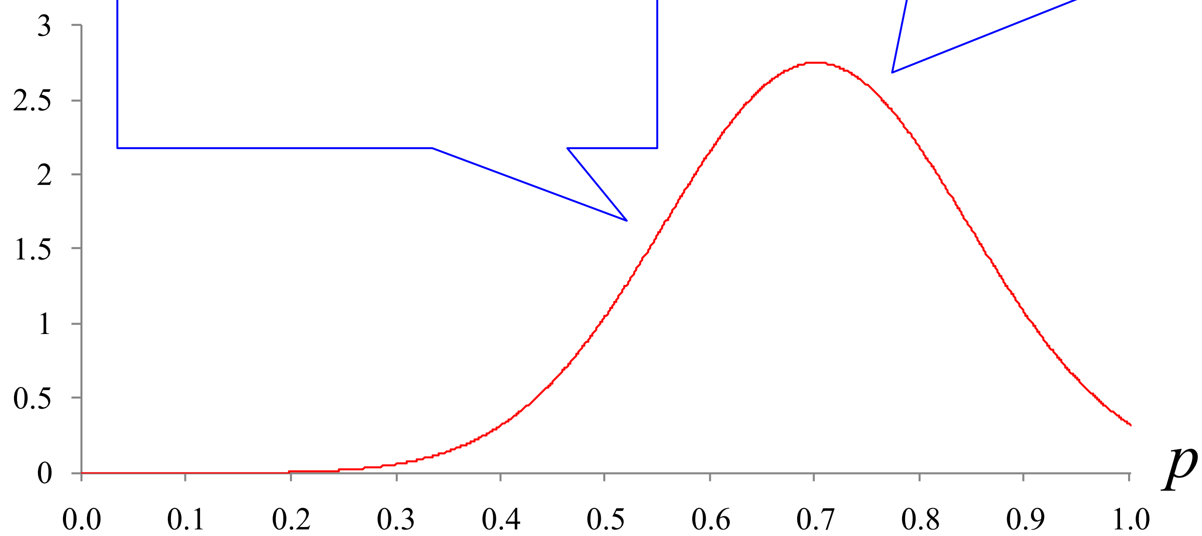
n匹のマウスへの薬の効き具合 $\bar{x}$ の分布は

理論平均： p_0

理論分散： $\sigma^2 = p_0(1-p_0)/n$

の正規分布となる.

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{(p-p_0)}{2\sigma^2}\right)$$



10匹のマウスに薬を投与して7匹に効けば，薬の効き具合 p は

確率分布

n匹のマウスへの薬の効き具合 $\bar{x}$ の分布は

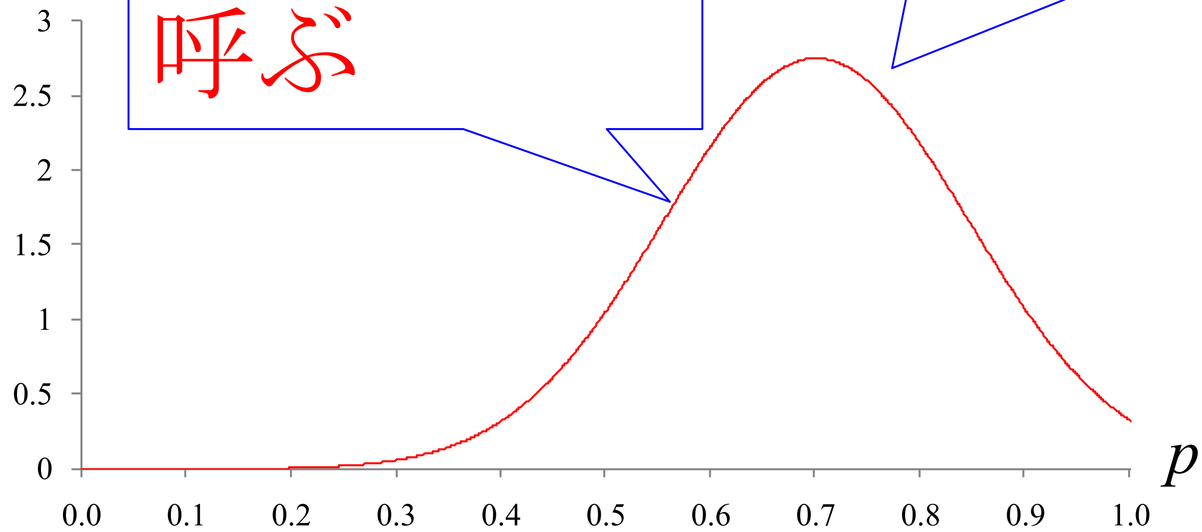
理論平均： p_0

理論分散： $\sigma^2 = p_0(1-p_0)/n$

の正規分布となる．

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{(p-p_0)^2}{2\sigma^2}\right)$$

確率分布と呼ぶ



10匹のマウスに薬を投与して7匹に効けば，薬の効き具合 p は

確率分布

n匹のマウスへの薬の効き具合　の分布は

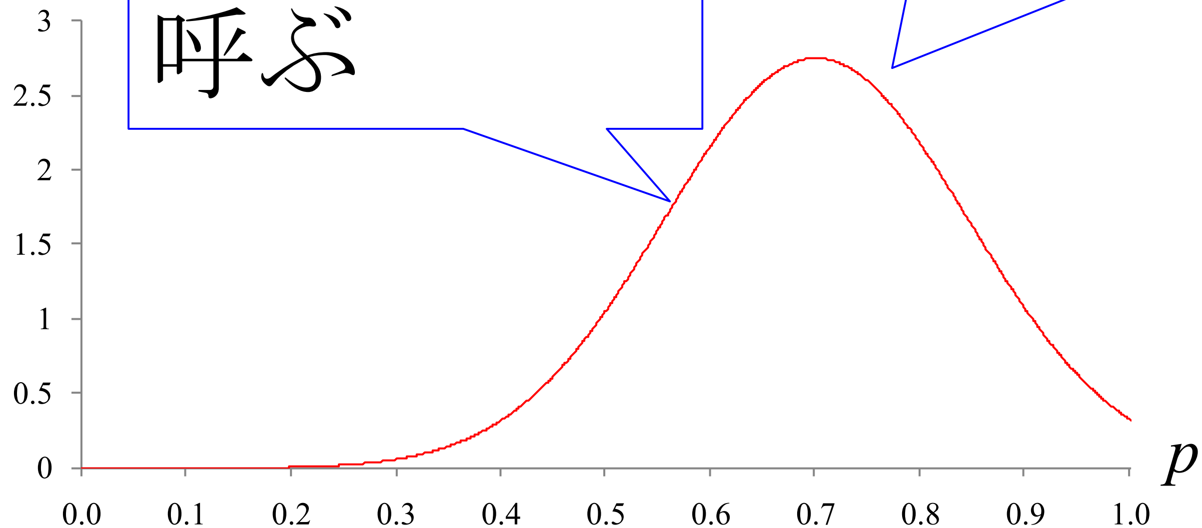
理論平均： p_0

理論分散： $\sigma^2 = p_0(1-p_0)/n$

の正規分布となる．

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{(p-p_0)}{2\sigma^2}\right)$$

確率分布と呼ぶ



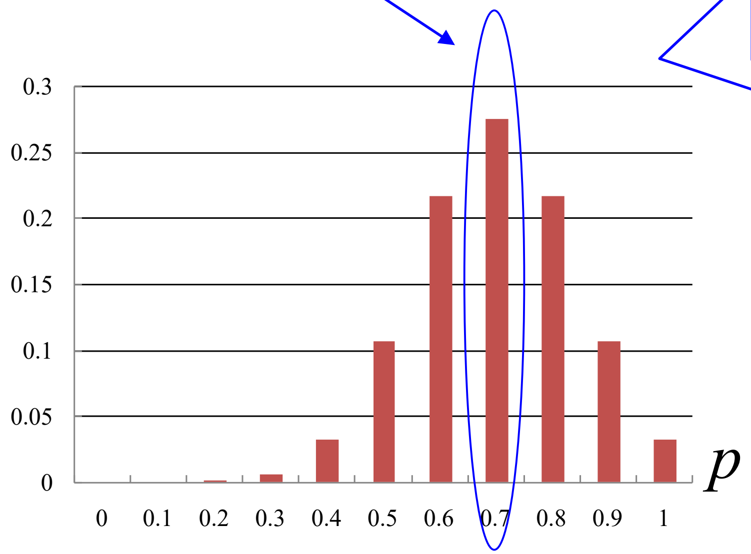
10匹のマウスに薬　けば，薬の効き具合 p は

$$p = \frac{7}{10} = 0.7$$

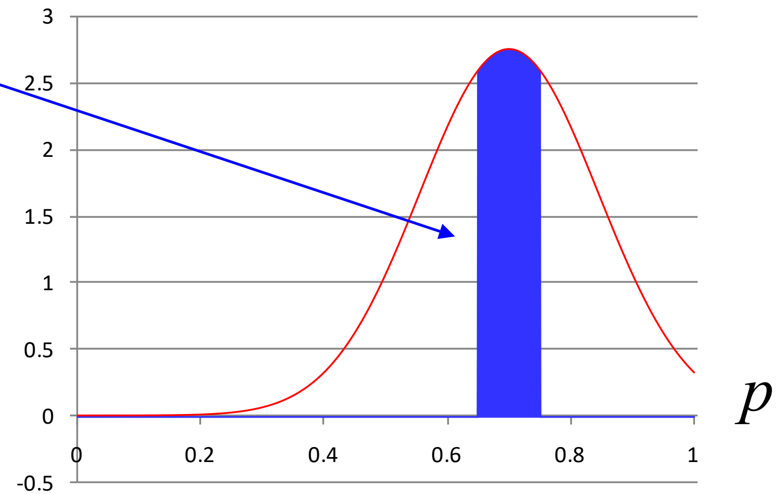
頻度グラフと確率分布の意味

pが　　　　　の範囲の値となったのは5000組中の　　　であった.

p が　　　　　の範囲の値をとる確率は　　である.



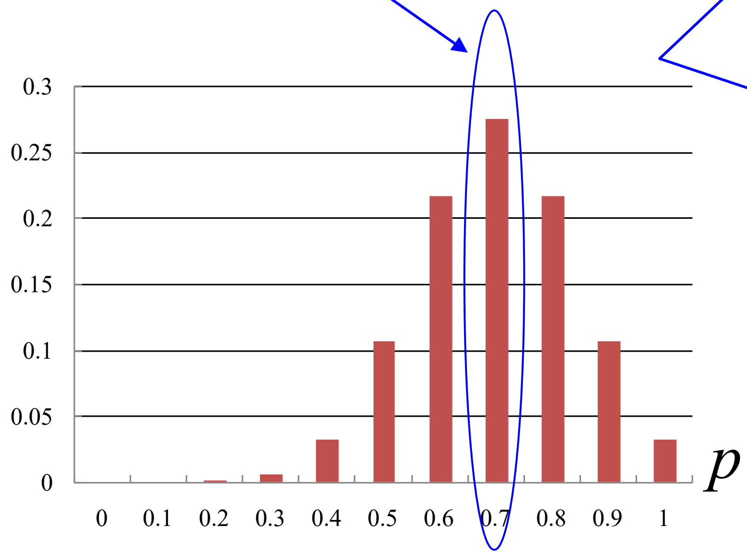
頻度分布



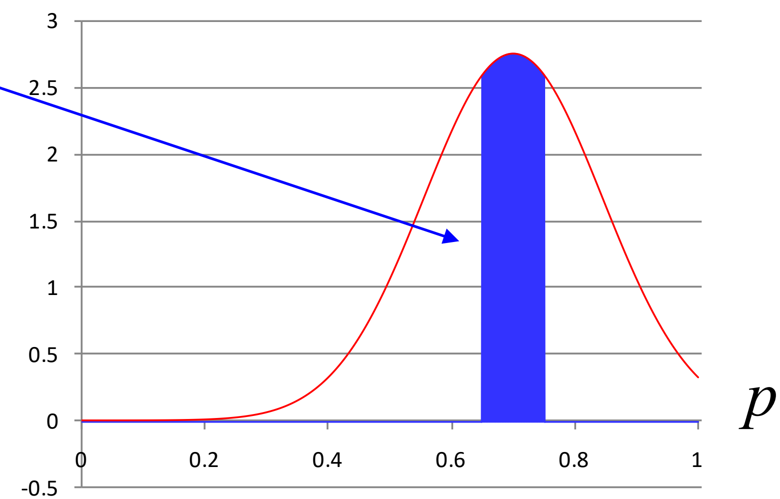
確率分布

p が0.65～0.75の範囲の値となったのは5000組中の約27%であった.

p が　　　　の範囲の値をとる確率は　　である.



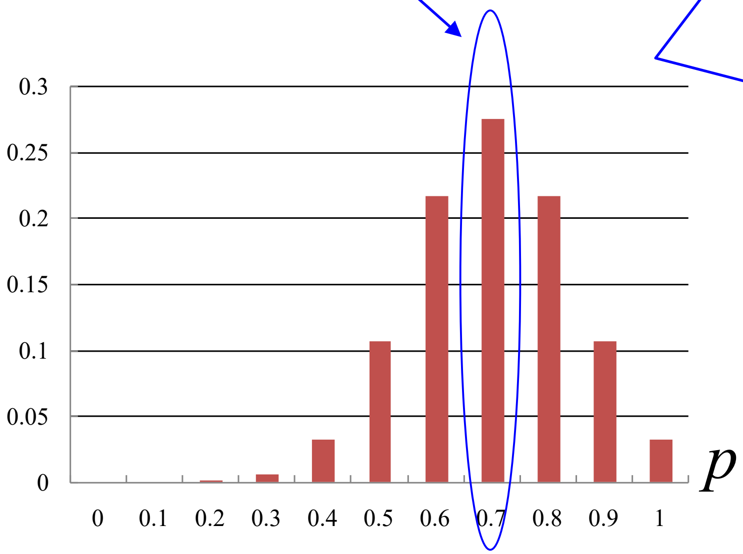
頻度分布



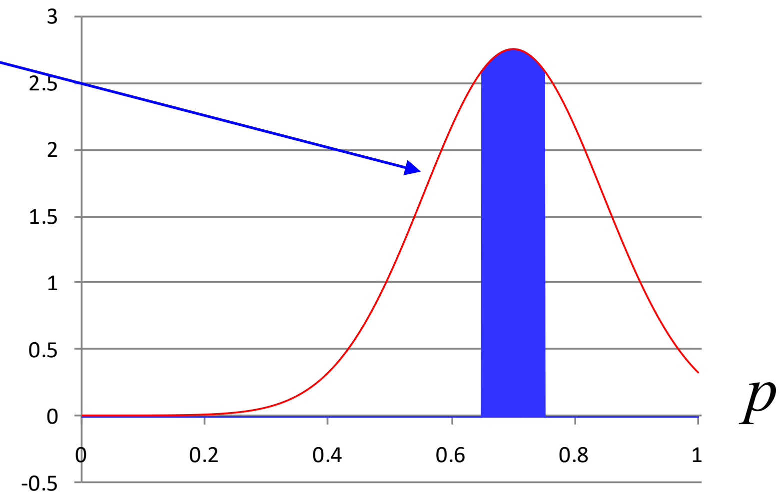
確率分布

p が0.65～0.75の範囲の値となったのは5000組中の約27%であった.

p が0.65～0.75の範囲の値をとる確率は0.27である．青い部分の面積が0.27になる．



頻度分布

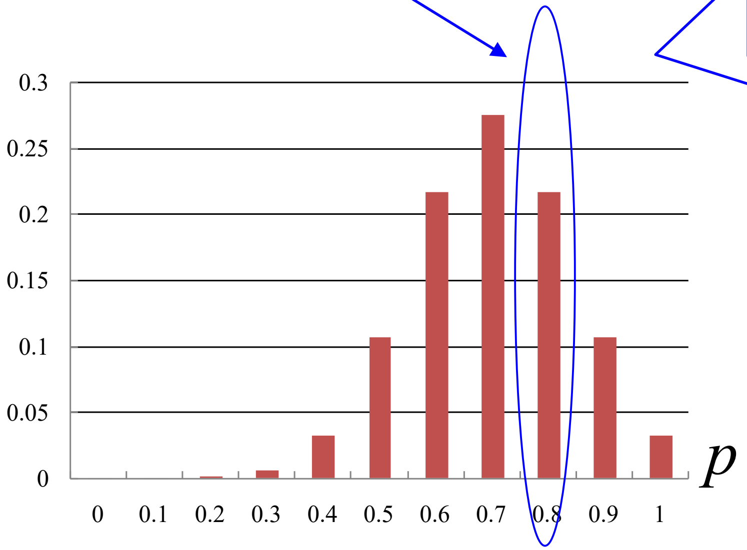


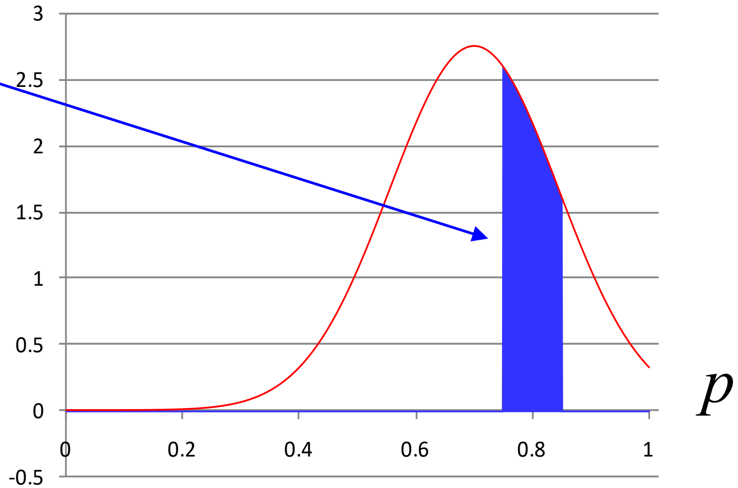
確率分布

頻度グラフと確率分布の意味

p が　　　　　の範囲の値となった
のは6000組中の　　　　であった.

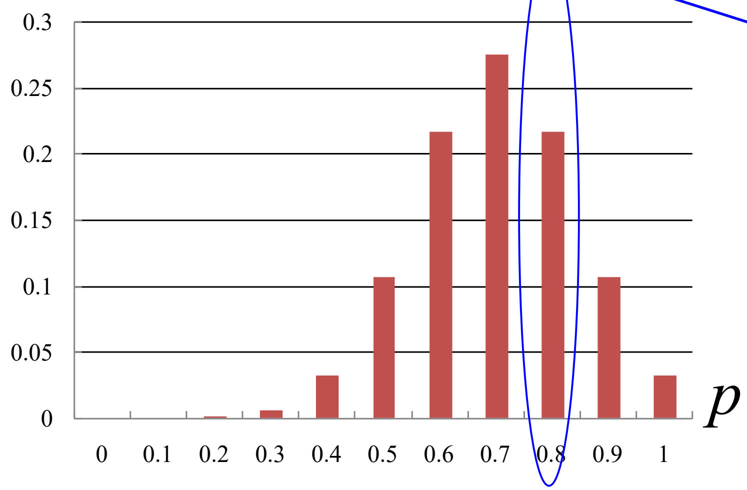
p が　　　　　　の範囲の値をとる
確率は　　　である.

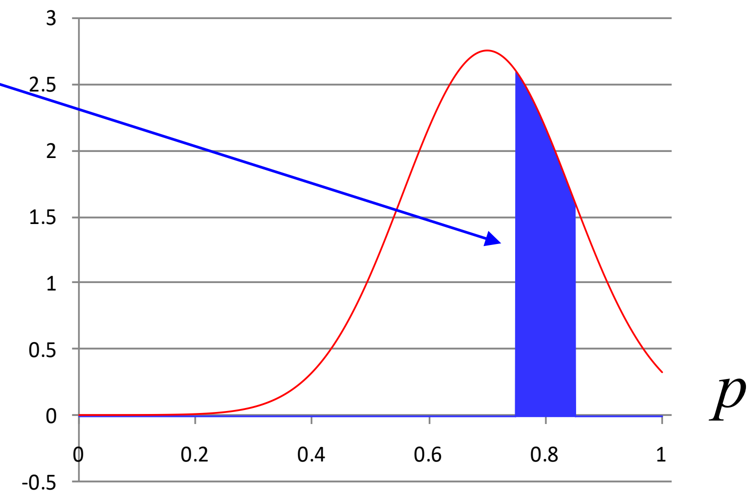




p が0.75～0.85の範囲の値となったのは6000組中の約21%であった.

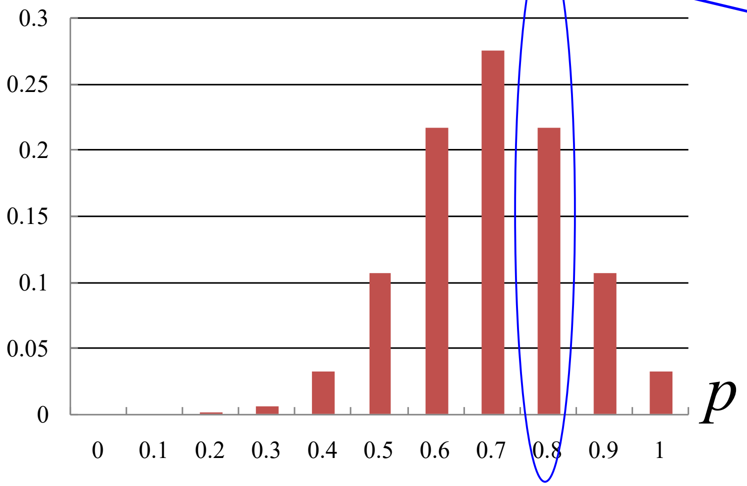
p が の範囲の値をとる確率は である.

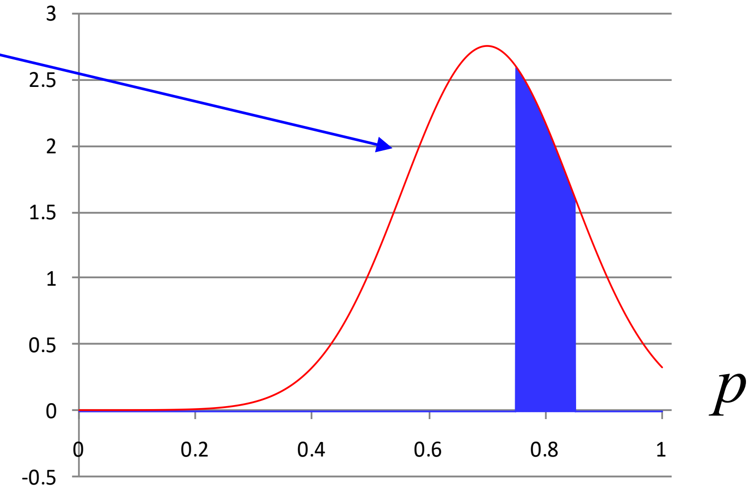




p が0.75〜0.85の範囲の値となったのは6000組中の約21%であった.

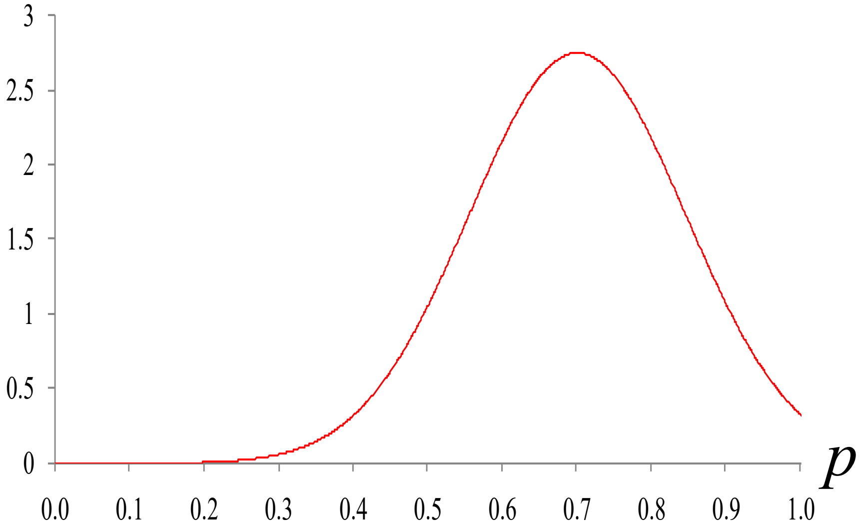
p が0.75〜0.85の範囲の値をとる確率は0.21である．青い部分の面積が0.21になる.



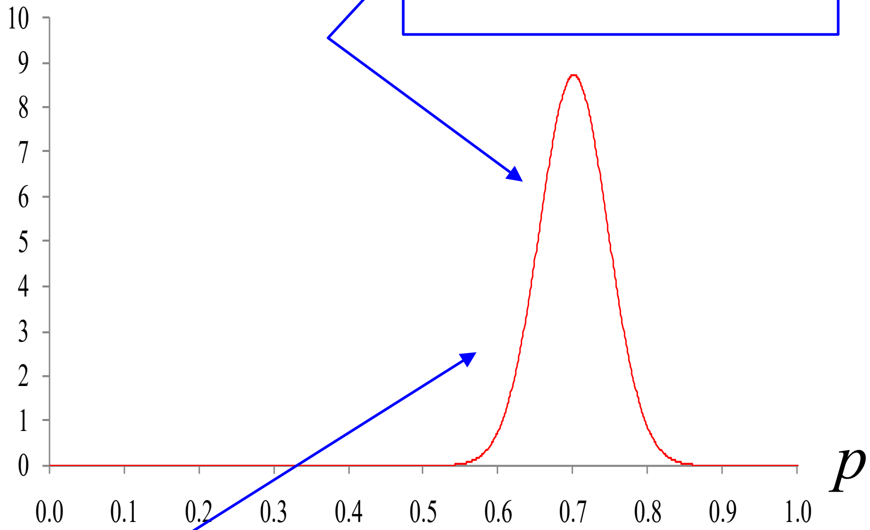


σ による分布形状の違い

$n = 10, p_0 = 0.7$の場合



$n = 100, p_0 = 0.7$の場合



$$\sigma = \sqrt{p_0(1 - p_0) / n}$$

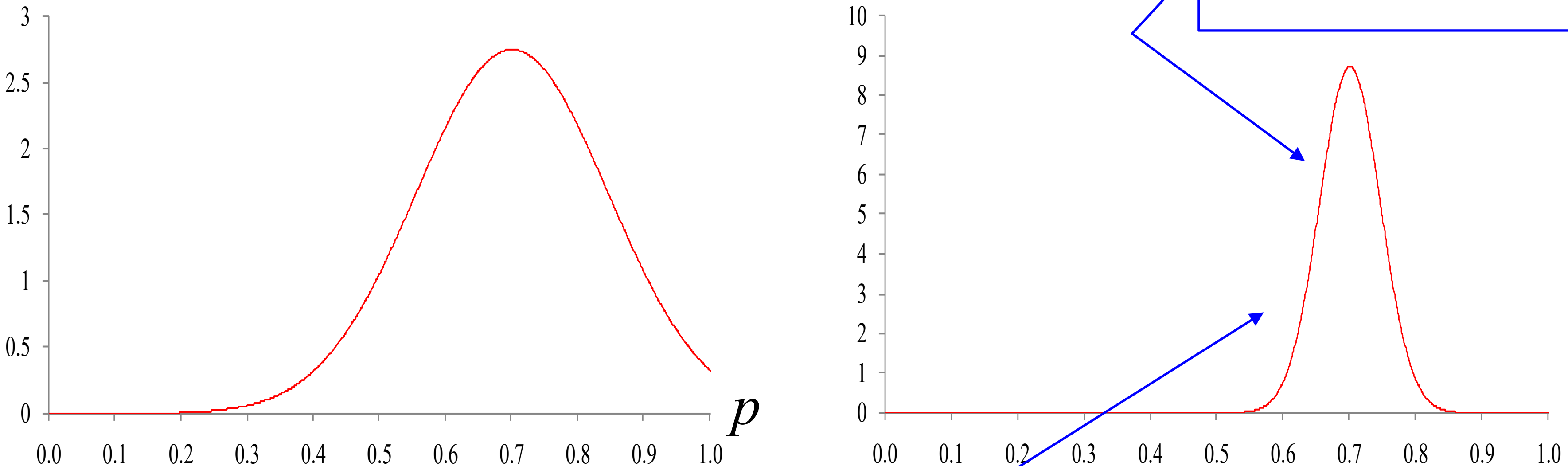
100匹で実験すれば，薬の効き具合 p

σ による分布形状の違い

$n = 10, p_0 = 0.7$の場合

$$\boxed{\sigma = 0.145}$$

$n = 100, p_0 = 0.7$の場合



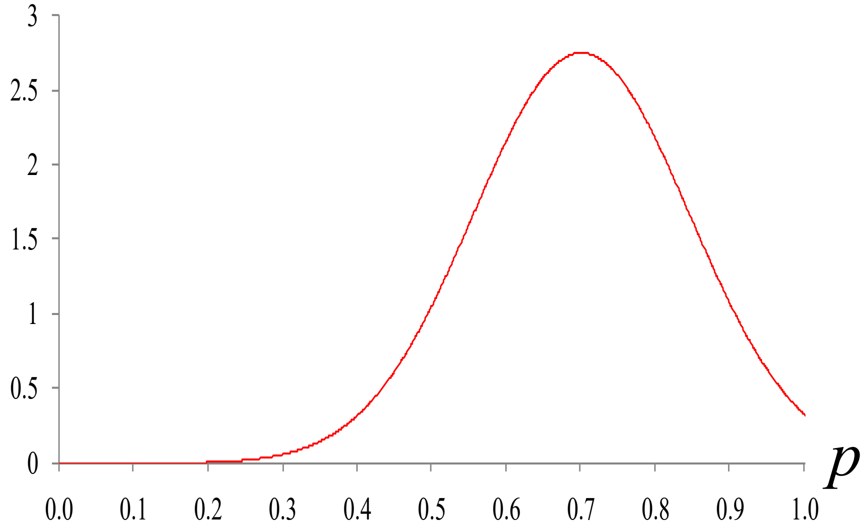
$$\sigma = \sqrt{p_0(1 - p_0)/n}$$
$$= \sqrt{0.7 \times (1 - 0.7)/10}$$
$$= 0.145$$

100匹で実験すれば，薬の効き具合p

σ による分布形状の違い

$n=10, p_0=0.7$ の場合

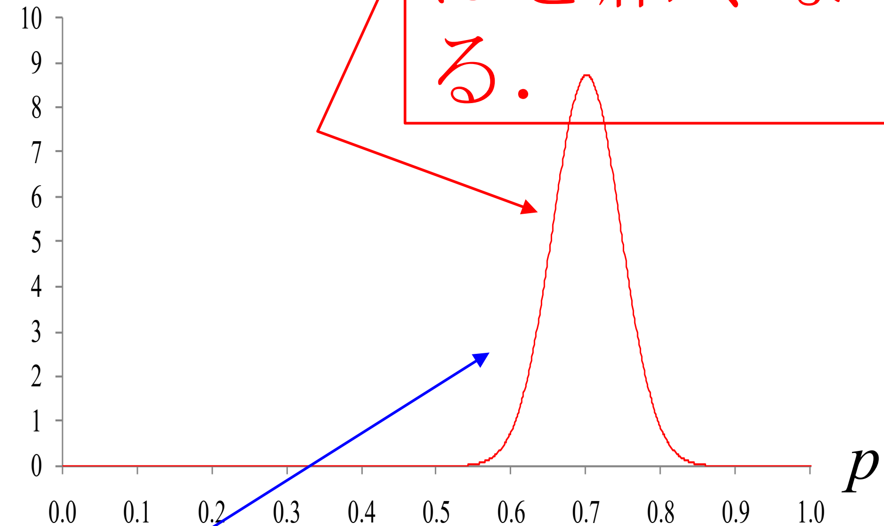
$\boxed{\sigma = 0.145}$



$n=100, p_0=0.7$ の場合

$\boxed{\sigma = 0.046}$

σが小さいほど細くなる．



$$\sigma = \sqrt{p_0(1-p_0)/n}$$

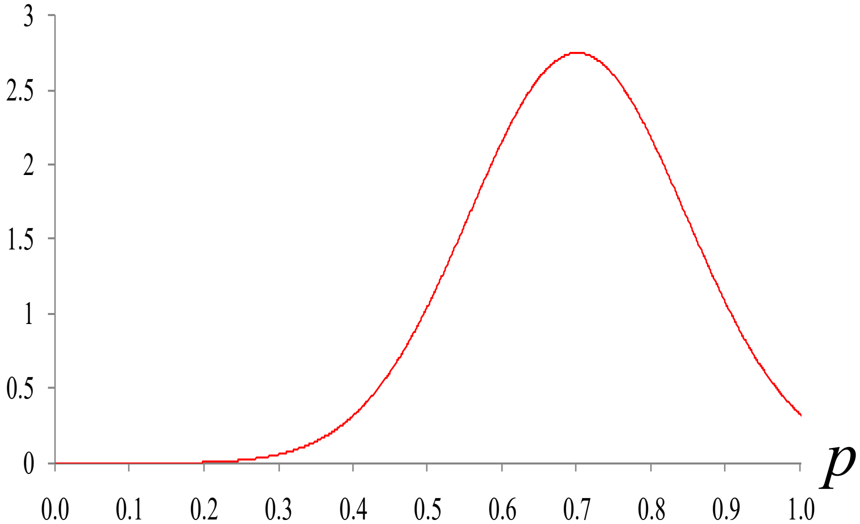
$$\boxed{\begin{aligned} &= \sqrt{0.7\times(1-0.7)/10} \\ &= 0.145 \end{aligned}}$$

100匹で実験すれば，薬の効き具合 p

σ による分布形状の違い

$n=10, p_0=0.7$の場合

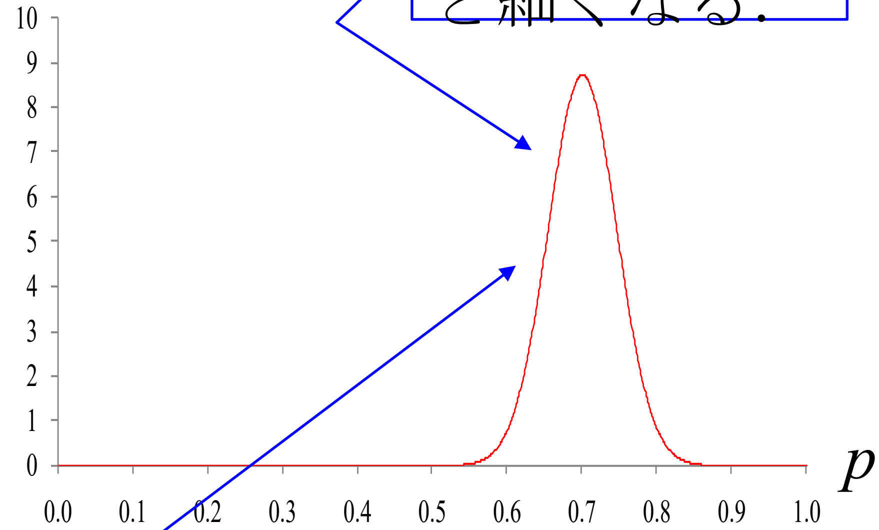
$\boxed{\sigma = 0.145}$



$n=100, p_0=0.7$の場合

$\boxed{\sigma = 0.046}$

σが小さいほど細くなる．



$$\sigma = \sqrt{p_0(1-p_0)/n}$$
$$= \sqrt{0.7 \times (1-0.7)/10}$$
$$= 0.145$$

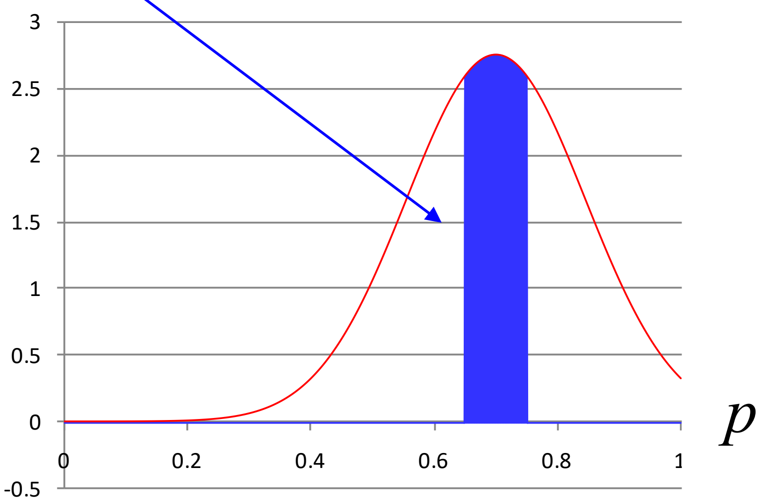
100匹で実験すれば，薬の効き具合 p のばらつく範囲は狭まる．

σ による分布形状の違い

$n = 10, p_0 = 0.7$の場合

$\boxed{\sigma = 0.145}$

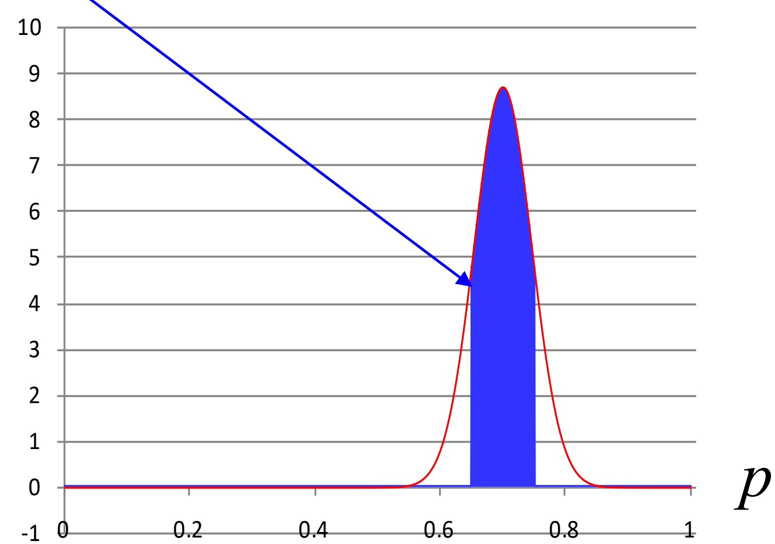
pが　　　　の範囲の値をとる確率は　　である.



$n = 100, p_0 = 0.7$の場合

$\boxed{\sigma = 0.046}$

pが　　　　の範囲の値をとる確率は　　である.

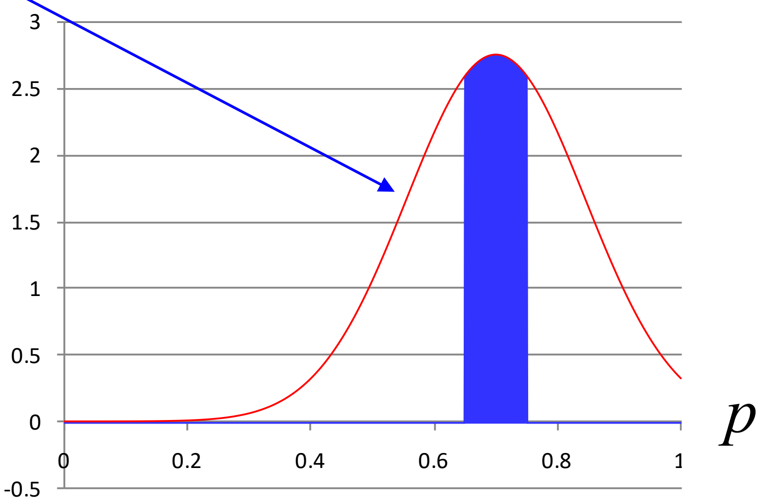


σ による分布形状の違い

$n = 10, p_0 = 0.7$ の場合

$\boxed{\sigma = 0.145}$

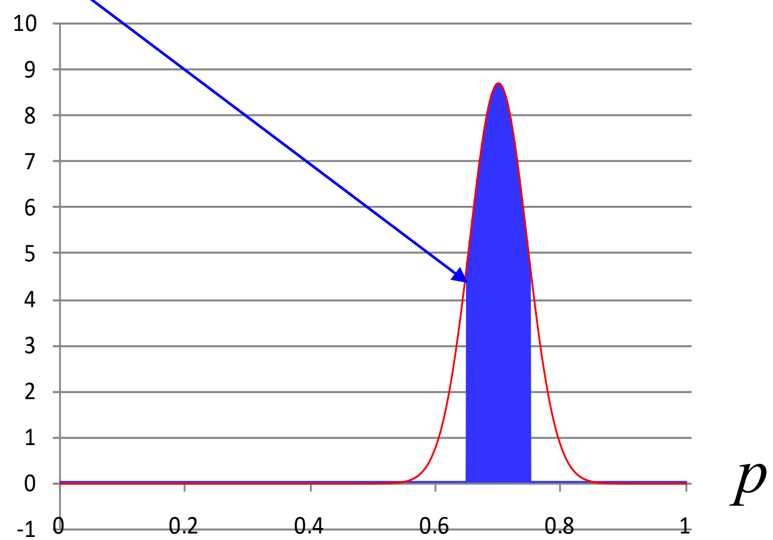
p が **0.65～0.75** の範囲の値をとる確率は **0.27** である.



$n = 100, p_0 = 0.7$ の場合

$\boxed{\sigma = 0.046}$

p が　　　　の範囲の値をとる確率は　　　である.

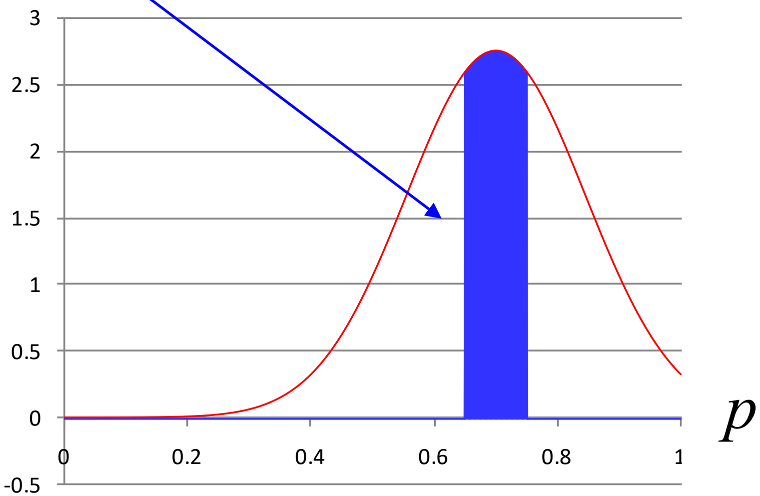


σ による分布形状の違い

$n = 10, p_0 = 0.7$の場合

$\boxed{\sigma = 0.145}$

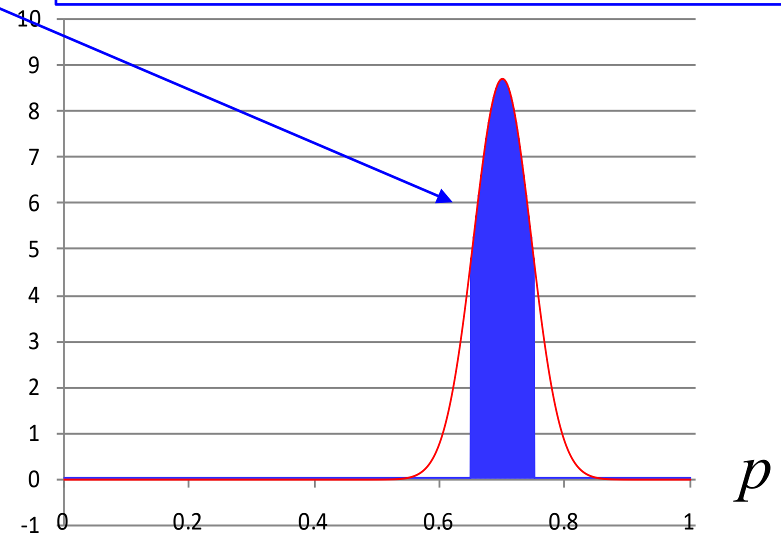
p が0.65〜0.75の範囲の値をとる確率は0.27である．



$n = 100, p_0 = 0.7$の場合

$\boxed{\sigma = 0.046}$

p が0.65〜0.75の範囲の値をとる確率は0.72である．



ではpが$p_0 - \sigma$〜 $p_0 + \sigma$ の範囲の値をとる確率は

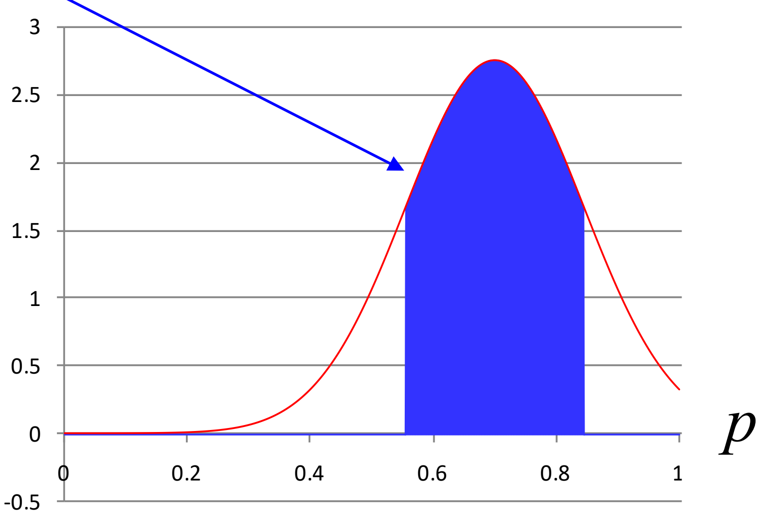
$n = 10, p_0 = 0.7$の場合

$\boxed{\sigma = 0.145}$

$p_0 - \sigma$

$p_0 + \sigma$

p が　〜　の範囲の値をとる確率は　である.



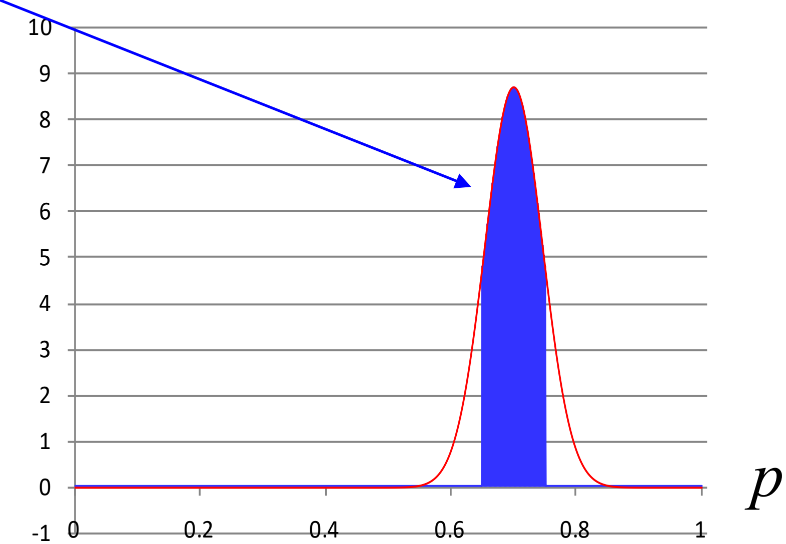
$n = 100, p_0 = 0.7$の場合

$\boxed{\sigma = 0.046}$

$p_0 - \sigma$

$p_0 + \sigma$

p が　〜　の範囲の値をとる確率は　である.



ではpが$p_0-\sigma$～$p_0+\sigma$の範囲の値をとる確率は

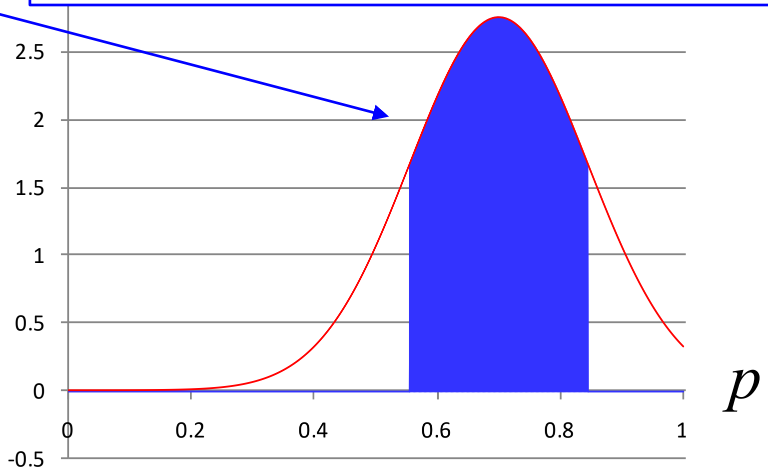
$n=10,\ p_0=0.7$の場合

$\boxed{\sigma=0.145}$

$p_0-\sigma$

$p_0+\sigma$

pが**0.555～0.845**の範囲の値をとる確率は**0.68**である．



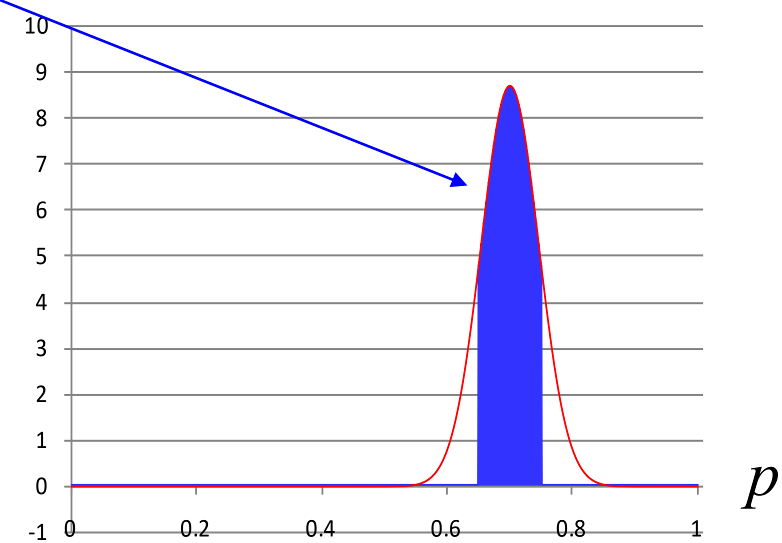
$n=100,\ p_0=0.7$の場合

$\boxed{\sigma=0.046}$

$p_0-\sigma$

$p_0+\sigma$

pが　～　の範囲の値をとる確率は　である．



ではpがp_0- σ～ p_0+ σ の範囲の値をとる確率は

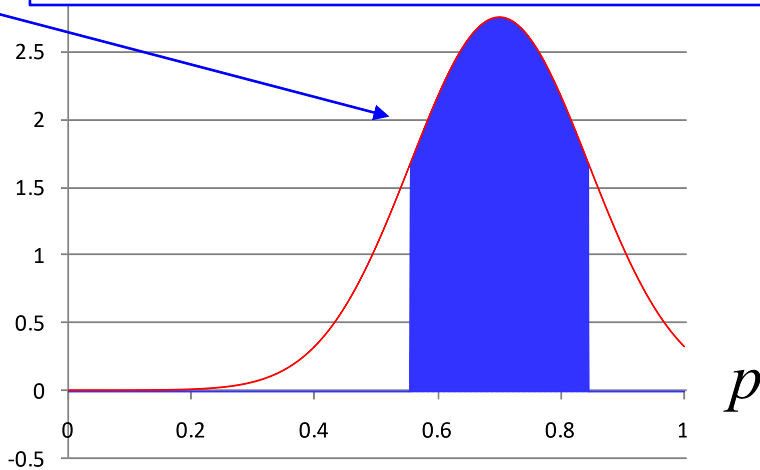
$n=10, p_0=0.7$の場合

$\boxed{\sigma = 0.145}$

p_0- σ

p_0+ σ

p が0.555～0.845の範囲の値をとる確率は0.68である.



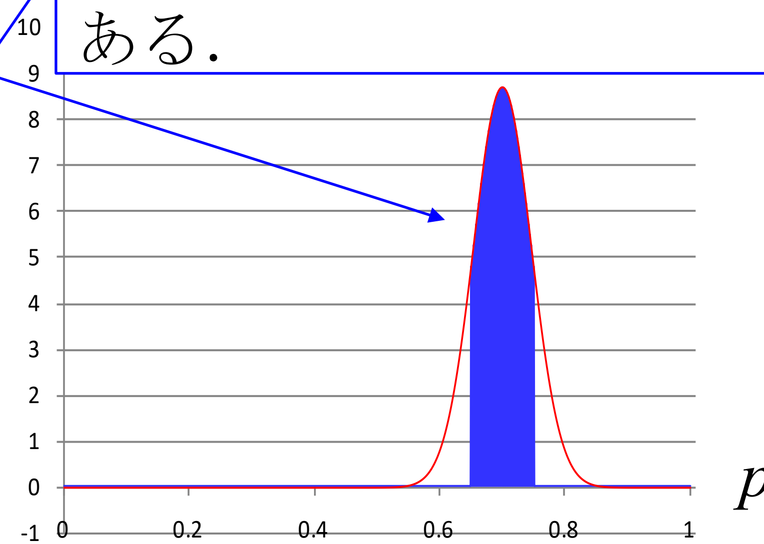
$n=100, p_0=0.7$の場合

$\boxed{\sigma = 0.046}$

p_0- σ

p_0+ σ

p が0.654～0.746の範囲の値をとる確率は0.68である.



ではpがp_0- 2σ〜 p_0+ 2σ の範囲の値をとる確率は

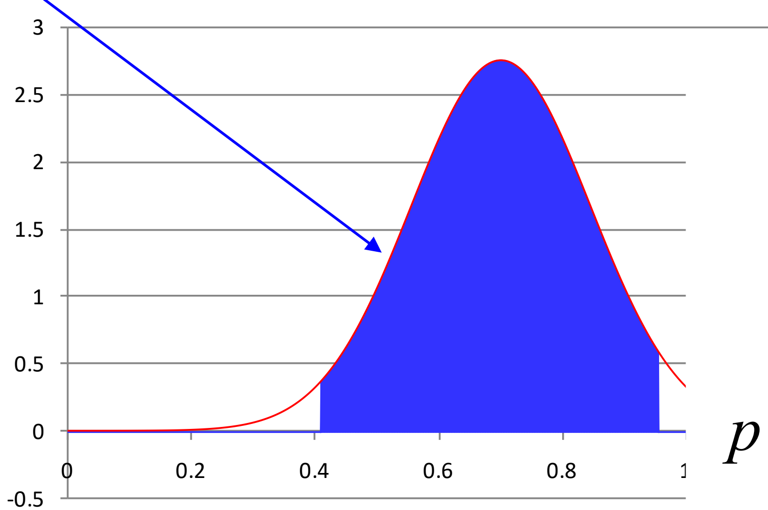
$n=10, p_0=0.7$の場合

$\boxed{\sigma = 0.145}$

p_0- 2σ

p_0+ 2σ

p が　　〜　　の範囲の値をとる確率は　　である.



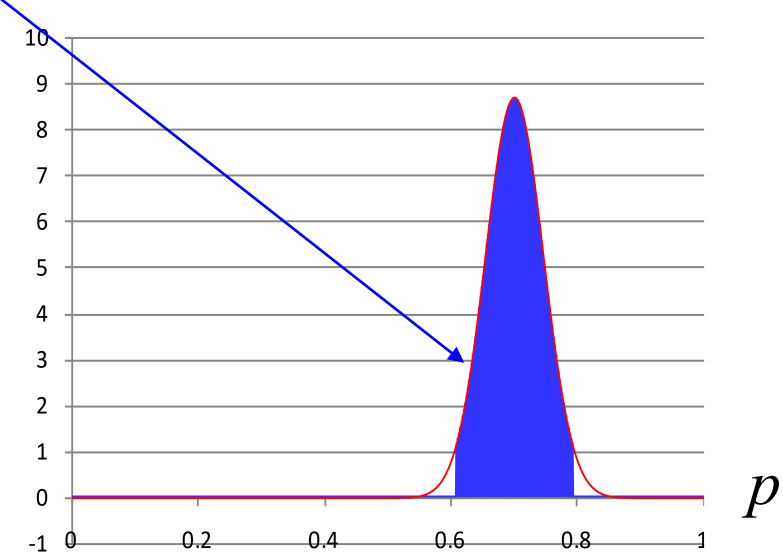
$n=100, p_0=0.7$の場合

$\boxed{\sigma = 0.046}$

p_0- 2σ

p_0+ 2σ

p が　　〜　　の範囲の値をとる確率は　　である.



ではpがp_0- 2σ〜 p_0+ 2σ の範囲の値をとる確率は

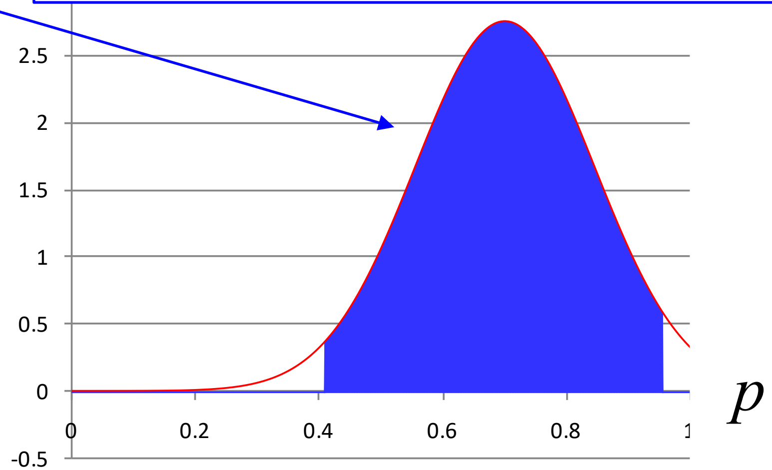
$n = 10, p_0 = 0.7$の場合

$\sigma = 0.145$

p_0- 2σ

p_0+ 2σ

p が0.41〜0.99の範囲の値をとる確率は0.954である.



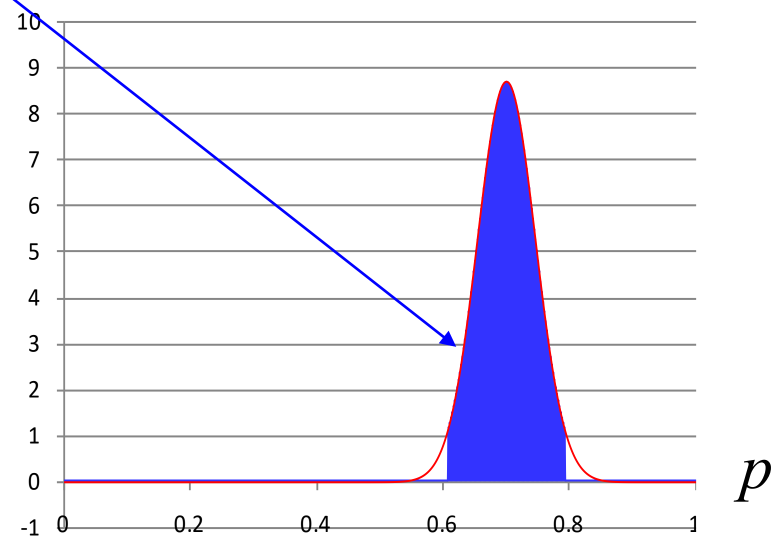
$n = 100, p_0 = 0.7$の場合

$\sigma = 0.046$

p_0- 2σ

p_0+ 2σ

p が　〜　の範囲の値をとる確率は　である.



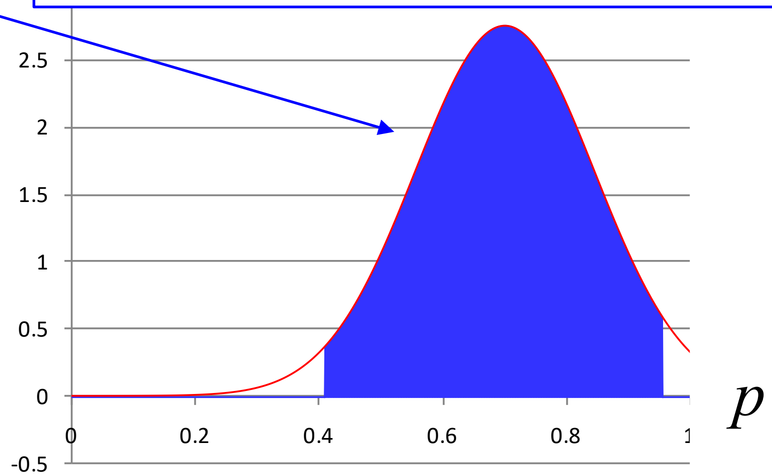
ではpがp_0- 2σ～ p_0+ 2σ の範囲の値をとる確率は

$n = 10, p_0 = 0.7$の場合

$\boxed{\sigma = 0.145}$

p_0- 2σ　　p_0+ 2σ

p が0.41～0.99の範囲の値をとる確率は0.954である.

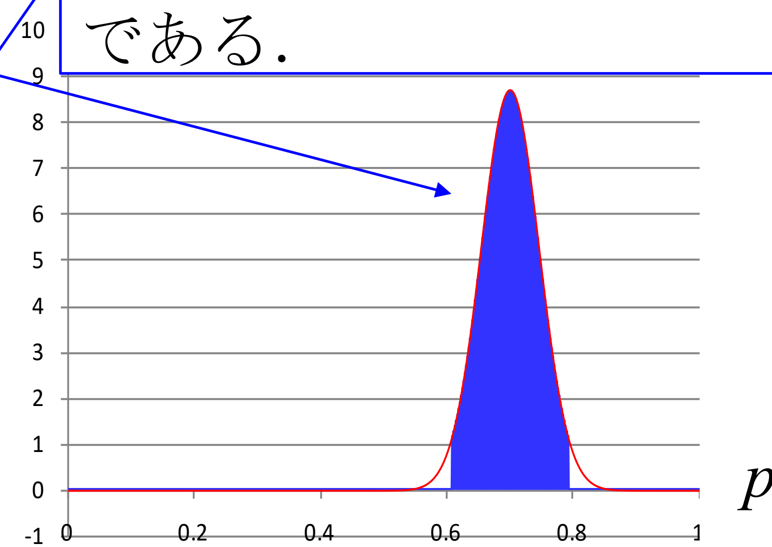


$n = 100, p_0 = 0.7$の場合

$\boxed{\sigma = 0.046}$

p_0- 2σ　　p_0+ 2σ

p が0.608～0.792の範囲の値をとる確率は0.954である.



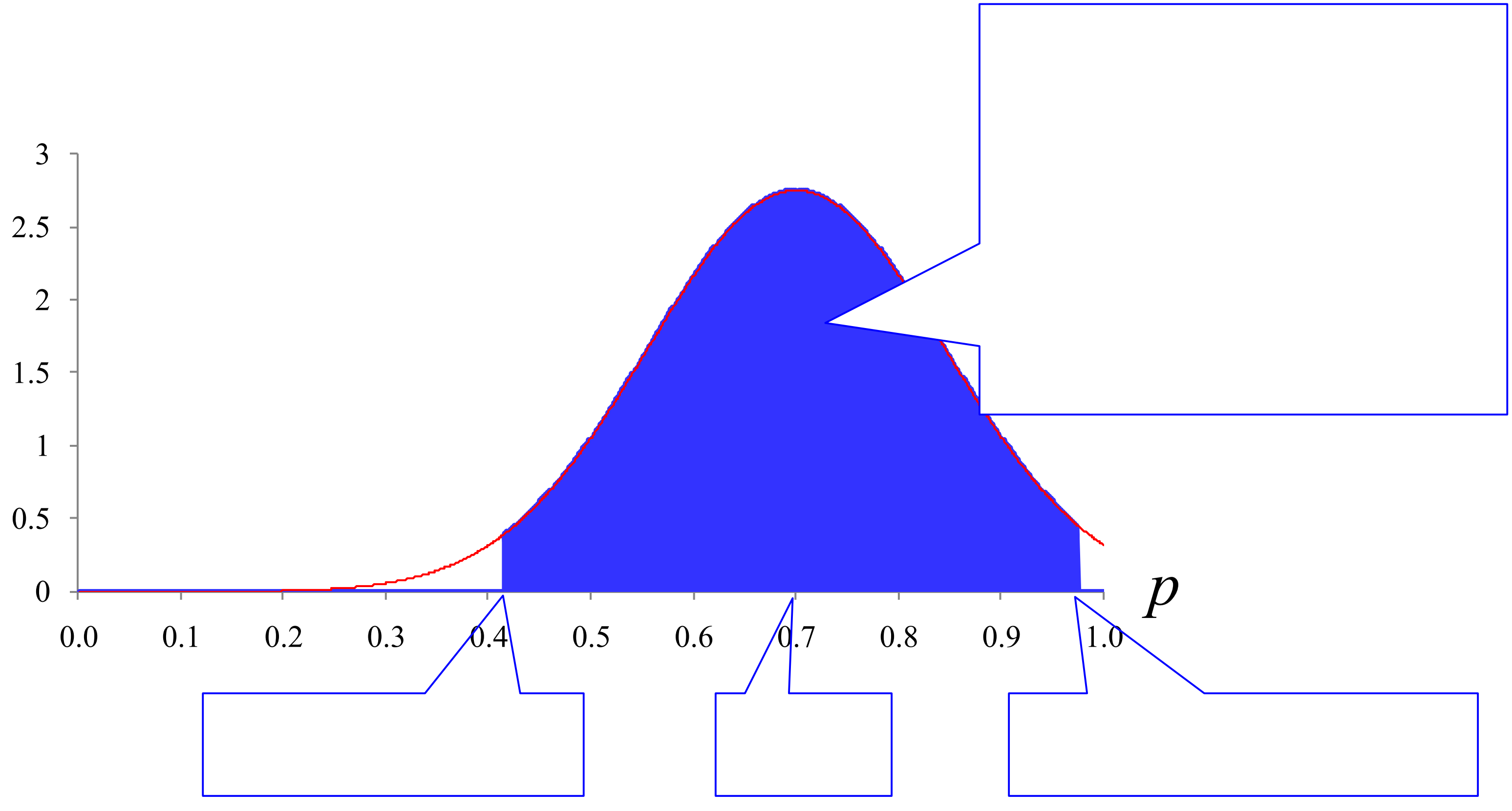
有効率の区間推定

n匹のマウスへの薬の効き具合 p の分布は

理論平均： p_0

理論分散： $\sigma^2 = p_0(1-p_0)/n$

の正規分布となった.



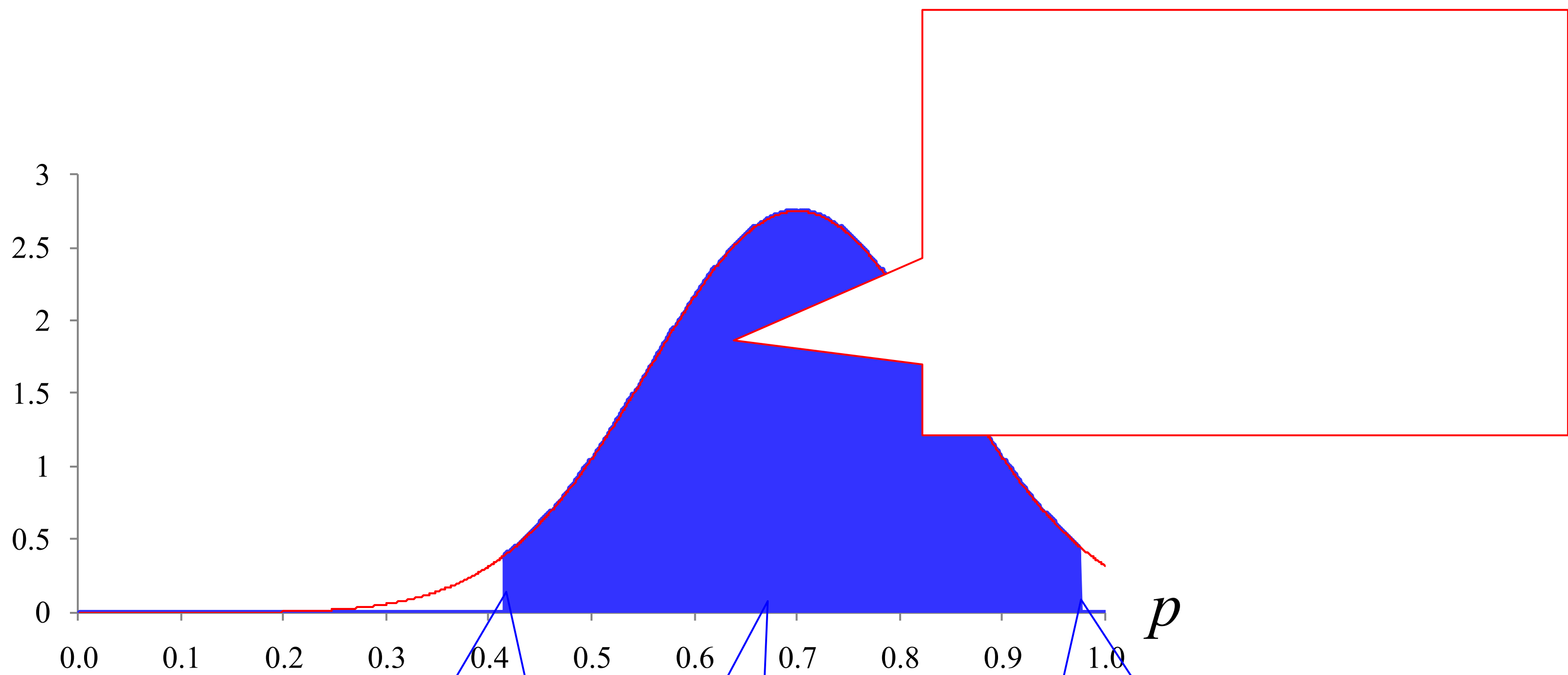
有効率の区間推定

n匹のマウスへの薬の効き具合 p の分布は

理論平均： p_0

理論分散： $\sigma^2 = p_0(1-p_0)/n$

の正規分布となった.



p_0-1.96σ

p_0

p_0+1.96σ

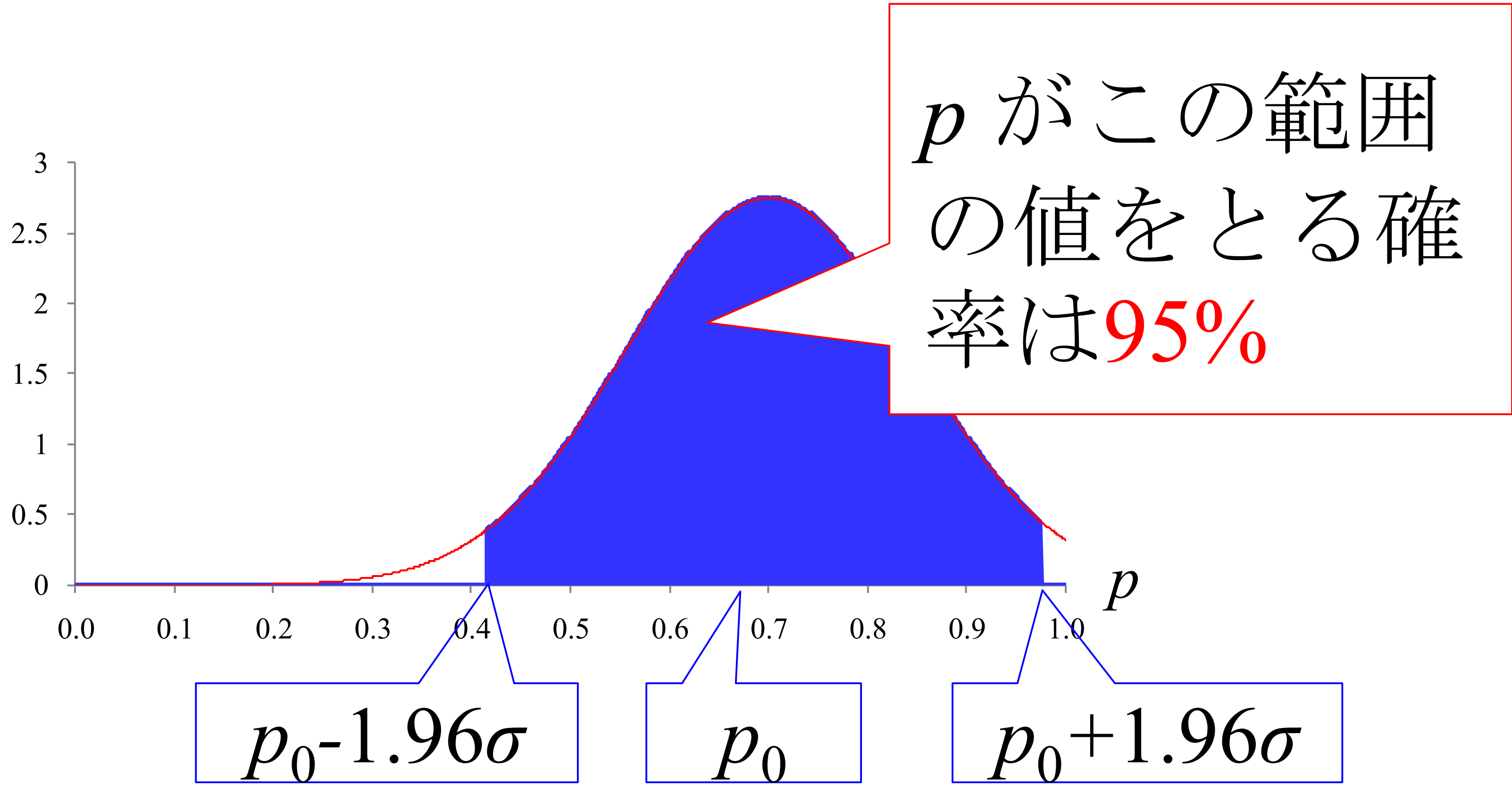
有効率の区間推定

n匹のマウスへの薬の効き具合 p の分布は

理論平均： p_0

理論分散： $\sigma^2 = p_0(1-p_0)/n$

の正規分布となった.



小テスト10.1（選挙での出口調査の信頼度）

先のA市長選においてB氏の当選確実は，開票がまだ３％程度しか進んでいないにもかかわらず，ニュースで大々的に報道された.

これは投票所を出てきた人（約1000人）に対して，誰に投票したかを調べた（出口調査と呼ばれる）結果によっていた.

1000人程度の人に聞いただけで，A市の投票者（約100万人）全体の投票結果が果たして精確に分かるのであろうか？

B氏への真の支持率 $p_0 = 0.6$，それ以外の人への真の支持率 $1\text{-}p_0 = 0.4$ として，$n = 1000$ 人による投票のシミュレーションを行い，真の支持率 p_0 の95%信頼区間を求めよ.

小テスト10.2　(テレビ番組の視聴率)

　テレビ番組の制作者にとって視聴率を上げることは最優先課題である．

　視聴率は例えば東海地区では600世帯がどのチャンネルを選んでいたかの調査結果で決められる．たったの600世帯で，東海地区数百万世帯がどのチャンネルを選んでいたかを精確に知ることができるのであろうか？

　チャンネルAの真の視聴率 $p_0 = 0.2$，それ以外のチャンネルの視聴率 $1\text{-}p_0 = 0.8$ として，$n = 600$ 世帯のチャンネル選択のシミュレーションを行い，真の視聴率 p_0 の95%信頼区間を求めよ．

2013年3月

著者：　古橋武
名古屋大学工学研究科計算理工学専攻
furuhashi@cse.nagoya-u.ac.jp