柔らかい人工知能を目指して（その2）

ファジィ理論

古橋　武　内川嘉樹

I. はじめに

従来，集合の境界は厳密に定義されなければなりませんでした。ある要素が集合に属するか，属さないか，そのどちらでもないということは，そもそも議論を始めることのできない，許されないことでした。しかし，現実の世界には境界があやふやな事柄が数多く存在します。特に私たちが日常生活で使っている言葉には，むしろ，厳密であるものの方が少ないのではないでしょうか。私たちが感じていること，思っていることを言葉で伝えようとしても，他の人の受け止めるものと正確に一致することはまずありえません。1965年にLotfi A. Zadehは，厳密に境界を定義する集合論では私たちの持っている感覚などを表現することが困難であることを指摘し，境界があいまいな集合の概念を提唱しました。Zadehはこの集合をファジィ集合と名づけました。 本稿では，ファジィ理論の基礎である，ファジィ集合の基本的な考え方と，工学の立場からファジィ制御とファジィ推論について解説をします。

II. ファジィ集合とは

1. 従来の集合の問題点

「暑い」という言葉を定義してくださいと言われたらどうしますか。集合論によりますと，集合“暑い”は，温度Tを要素として，例えば

$$\text{“暑い”} : \{T \mid T \geqq 28.5\,℃\} \tag{1}$$

と定義することができます。これは，特性関数なるものを用いて次のように表現することも可能です。

$$\chi_{\text{“暑い”}}(T) = \begin{cases} 1 & T \geqq 28.5\,℃ \\ 0 & T < 28.5\,℃ \end{cases} \tag{2}$$

図1はこの特性関数を示します。温度Tが集合“暑い”に属すれば特性関数の値は1，そうでなければ0です。この定義は「暑い」という言葉を誰にでも誤解を与えることなく伝えることができます。しかし，この定義は我々の持っている「暑い」という言葉の概念を的確に表現しているので

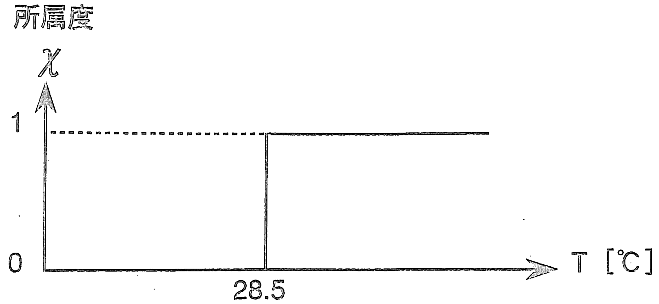


図1　特 性 関 数

しょうか。この問いかけに対して，次の2通りの回答がよく聞かれます。

1：「私は暑がりだからもっと低い温度でも暑いと思う。」

2：「28.49℃は暑くなくて,28.5℃は暑いというのはおかしい。」

1の回答に対しては，あるいは

$$\text{“Aさんにとっての暑い”}:\{T \mid T \geqq 27\,℃\} \tag{3}$$

とすればよいのかも知れません。しかし，2番目の回答は,（従来の）集合表現の本質的な問題を含んでいます。この疑問は, 他の言葉でも同様に起きます。“若い”を, 年齢 Y を要素として,

$$\text{“若い”}:\{Y \mid Y < 40\} \tag{4}$$

としたらどうでしょうか。40才の誕生日を迎えたとたんにあなたはもう若くないと宣言されたらとても不愉快です。この他にも,“少し”“もうちょっと”“だいぶ”等々, 私たちの使っている多くの言葉がどうも上記の集合表現になじまないようです。では, どうしたらよいでしょうか。一つの, そして, 歴史的な解答が次節のファジィ集合です。

2.　ファジィ集合の考え方

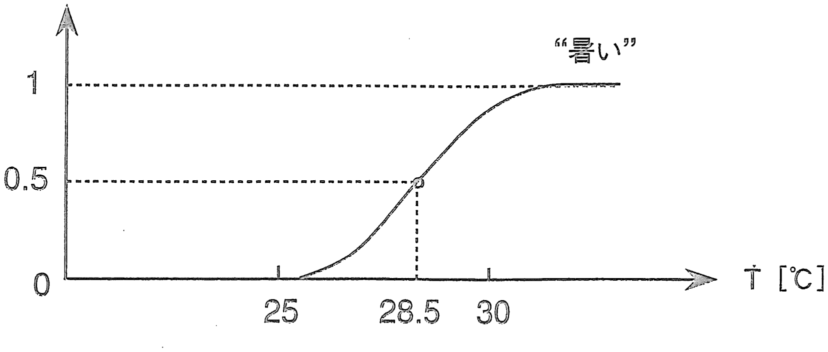


図2　メンバーシップ“暑い”

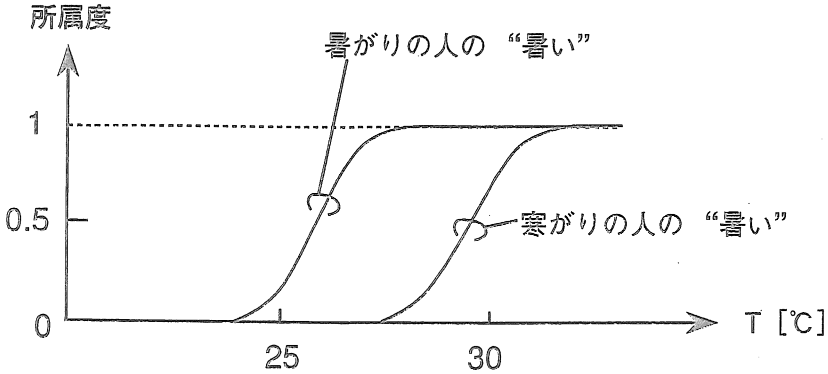


図３　メンバーシップ関数　暑／寒がりの人の“暑い”

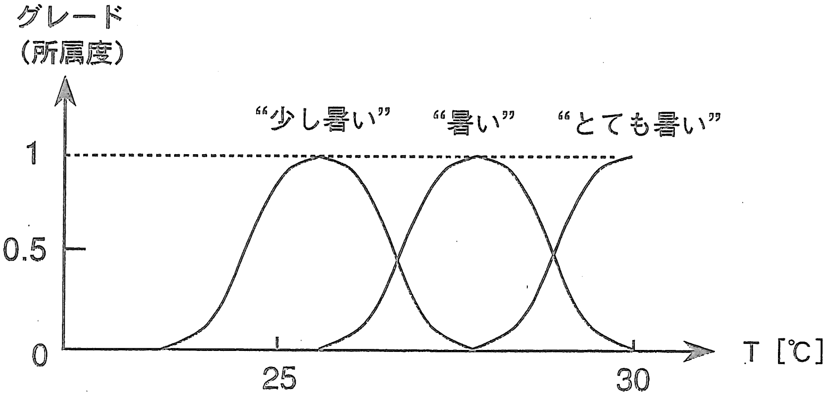


図４　メンバーシップ関数　“少し暑い”　“暑い”　“とても暑い”

従来の集合では特性関数が集合の定義に用いられました。これに対してファジィ集合ではメンバーシップ関数により集合を定義します。図２は集合“暑い”を定義した例です。横軸が温度で，縦軸はこの温度が集合“暑い”に所属する度合いを表しています。前節では 28.5 ℃は集合“暑い”の境界でした。図２の例では 28.5 ℃は“暑い”に 0.5 の度合いで所属しています。30 ℃を越えたら確かに暑く，所属度は 1 に近づきます。また,25 ℃を下回ればこれはもう暑くなく，所属度 0 という具合です。この表現によれば,28.49 ℃は所属度 0.499 で 28.5 ℃との差はわずかとなります。温度Ｔに関する“暑い”のメンバーシップ関数は，その関数値が“暑い”の所属度を表し

$$\mu_{\text{“暑い”}}(T) \tag{5}$$

と表記されます。この関数の値はメンバーシップのグレードと呼ばれます。　暑がり屋さんの“暑い”や寒がりやさんの“暑い”もそれぞれ図３に示しますように柔軟に表現ができます。さらには，図４のように“少し暑い”“暑い”“とても暑い”などに対しても，私たちの感覚をそれほど不自然でなく表現しています。　ファジィ集合は集合の境界をあいまいにしたものです。Fuzzy はもともと布・衣服などのけばだった状態をいいますが，けばだった布の表面を微細に見ますと，布と布の

けばと布でないところの境界を明確に定めることは難しいものです。そこで，境界のあいまいな集合がファジィ集合と名づけられました。従来の境界が明確な集合は，ファジィ集合と区別するために，クリスプ集合と呼ばれます。　先ほどの“若い”の例では，もう誕生日は若さの決定的な区切りではなくなります。安心して誕生日を迎えることができます。若さのグレードは１日ごときでは誤差のうちです。

III.　ファジィ集合の応用

前節のファジィ集合の考え方は，心理学，経済学などの文系の分野から，エキスパートシステム，プラント・自動車・家電品の制御など，工学の分野まで幅広い応用が進められています。本稿では，ファジィ制御とファジィ制御のためのファジィ推論について紹介します。

1.　ルールベース制御

自動車の運転をするとき，例えば，加速するとき，減速するとき，カーブを曲がるとき，車庫に入れるときなどに私たちはアクセルを“少しずつ”ふかし，ブレーキは“控え目に”かけ，ハンドルを“ちょっとずつ”切って，“気持ちの良い”運転を心がけたりします。このとき私たちが用いている制御ルールは，いちいち言葉にしなくても，体が覚えていてくれます。このベテランドライバのテクニックをコンピュータに移植し，制御の自動化を行おうとしたとき，有効な手段にルールベース制御があります。ルールベース制御は

$$\text{もし}\quad x_1\text{がAで}x_2\text{がB}\quad\text{であれば}\quad y\text{はCである} \tag{6}$$

と表現されるルールをコンピュータの中にたくさん用意し，この場合はこの操作，別の場合はこっちの操作と，ルールベースに蓄えられたルールにしたがってコンピュータが自動的に制御を行うものです。ここで，ルールベースにはベテランの経験が記述されます。x_1，x_2は車の速度であったり，加速度であったりします。y は例えばアクセルの踏み具合です。ベテランの経験には前述のような“少し”“きつく”などの言葉がふんだんに入ってくることでしょう。A，B，Cをファジィ集合とすることが有効です。　そこで，もう少し簡単でしかも身近な冷房を具体例に，ファジィ集合を応用したファジィ制御についてその有効性を示していきます。　まず，ルールベースによる部屋の温度制御を考えます。この制御では部屋の温度を温度計により測り，この測定値を目標値に近づけるようにエアコンのつまみを調整します。ベテランから以下の５個のルールが聴取できたとします。

$$\begin{array}{llll}
R^1: If & \text{“暑い”} & Then & \text{“とても強く冷す”} \\
R^2: If & \text{“少し暑い”} & Then & \text{“強く冷す”} \\
R^3: If & \text{“ちょうど良い”} & Then & \text{“中位に冷す”} \\
R^4: If & \text{“少し涼しい”} & Then & \text{“弱く冷す”} \\
R^5: If & \text{“涼しい”} & Then & \text{“とても弱く冷す”}
\end{array} \tag{7}$$

図6はつまみの模式図です。

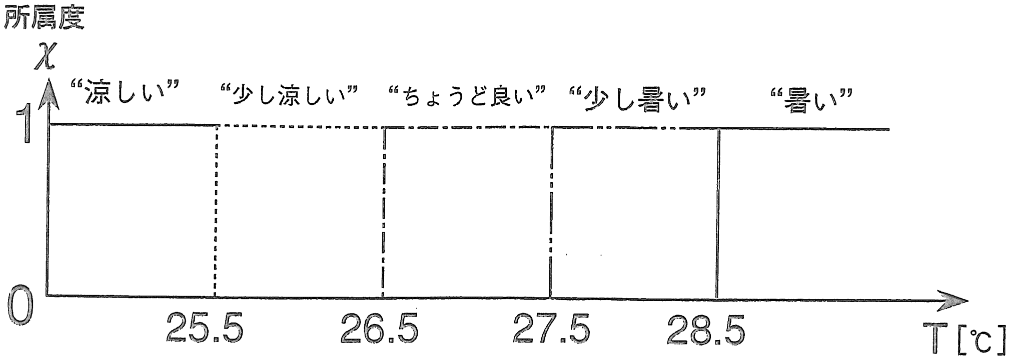


図5　暑さに関する特性関数

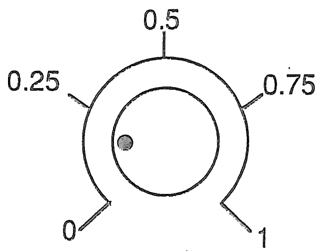


図6　エアコンのつまみ

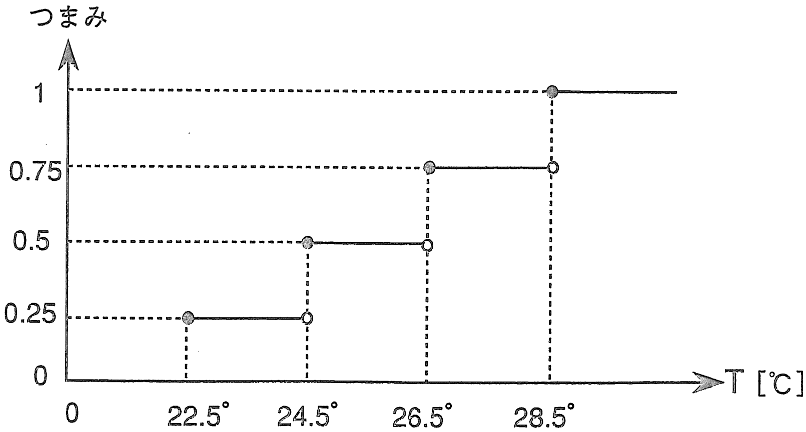


図7　部屋の温度とつまみの関係（ルールベース制御）

もし，従来の境界が明確な集合により，これらのルールの中の言葉を定義したとすると，例えば，図5のように暑さに関する各集合の特性関数を定義できます。"ちょうど良い"は26.5℃以上27.5℃未満としました。同じようにして，"とても強く冷す"などの言葉に対応したエアコンのつまみ

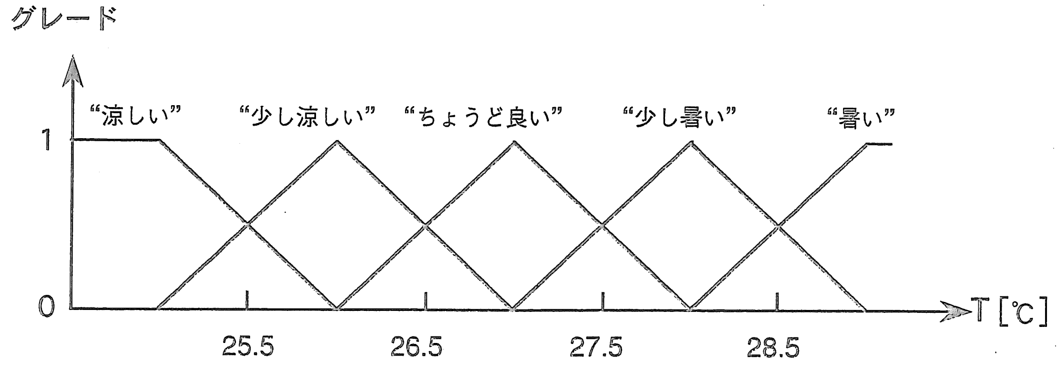
の位置を決めます。

$$
\begin{array}{ll}
\text{“とても強く冷す”} & = 1 \\
\text{“強く冷す”} & = 0.75 \\
\text{“中位に冷す”} & = 0.5 \\
\text{“弱く冷す”} & = 0.25 \\
\text{“とても弱く冷す”} & = 0
\end{array} \tag{8}
$$

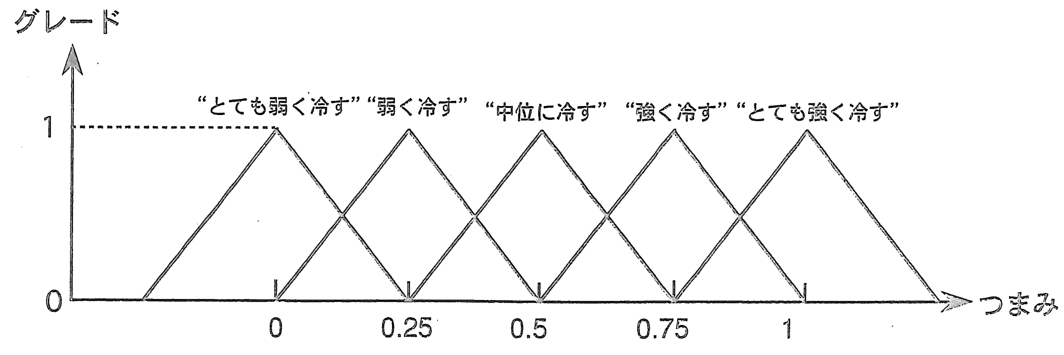
と決めれば，これでエアコンの制御は可能です。部屋の温度とつまみの関係は図７に示すような階段上の変化として得られます。

2. ファジィ制御

（ａ）１入力の制御



(a) 部屋の温度



(b) つまみの位置

図８　部屋の温度制御のためのメンバーシップ関数

（７）式の中の暑さと冷し方に関する言葉のそれぞれにファジィ集合を適用します。図８はその例

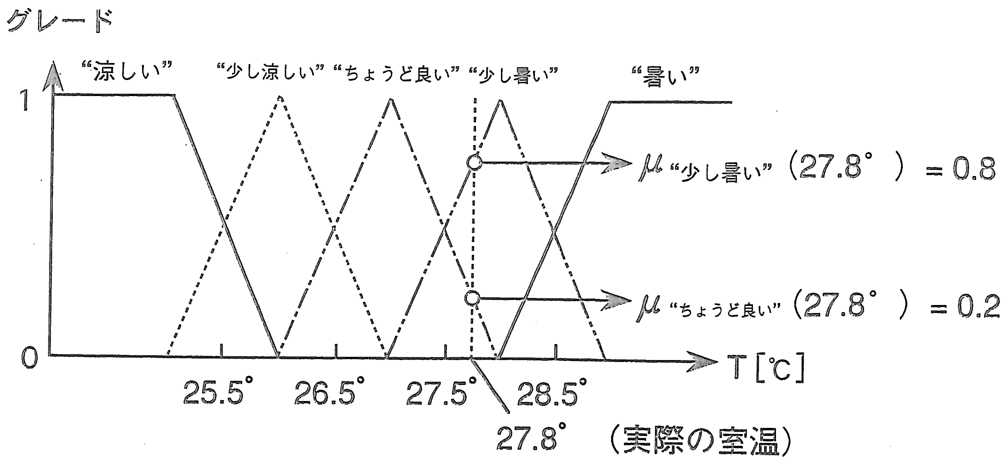


図9　メンバーシップ関数のグレード

です。簡単のため，各メンバーシップ関数は三角形としています。それぞれの集合の境界をあいまいにすることで，ベテランの表現した言葉の感覚に近づけることができています。　メンバーシップ関数が決定できたところで，これらの関数とベテランから聴取したルールを用いて部屋の温度制御を行うことになるのですが，実際の部屋の温度からつまみの位置を求める推論の仕方を決めなければなりません。前節のルールベース制御では，ある室温に対して該当する（発火する）ルールは一つでしたので，つまみの位置は一意に決めることができました。集合の境界をあいまいにしたことで，温度の一つの値は複数の集合に属することになります。したがって，複数のルールが発火しますので，これらのルール間の調整をする必要があります。　ファジィ推論の代表的な例として，Mamdaniの推論法を紹介します。Prof. Mamdaniは1970年代の初めに世界で初めてファジィ集合を制御に応用した人です。彼の成功がファジィ集合の概念の工学的有用性を多くの人に認めさせる結果となりました。　今，図9に示すように実際の室温が27. 8℃であったとします。このとき，“少し暑い”と“ちょうど良い”のメンバーシップのグレードはそれぞれ0.8，0.2となります。

$$\mu_{\text{少し暑い''}}(27.8\ ℃) = 0.8$$
$$\mu_{\text{``ちょうど良い''}}(27.8\ ℃) = 0.2 \tag{9}$$

とも表現されます。関係するルールは

$$R^2 : If\quad \text{“少し暑い”}\qquad Then\ \text{“強く冷す”}$$
$$R^3 : If\quad \text{“ちょうど良い”}\quad Then\ \text{“中位に冷す”} \tag{10}$$

の二つです。ルールが今の室温の状況に適合する度合いを適合度と呼び，ルールR^2，R^3の適合度ω_2，ω_3を

$$\omega_2 = \mu_{\text{“少し暑い”}}(27.8\ ℃) = 0.8$$
$$\omega_3 = \mu_{\text{“ちょうど良い”}}(27.8\ ℃) = 0.2 \tag{11}$$

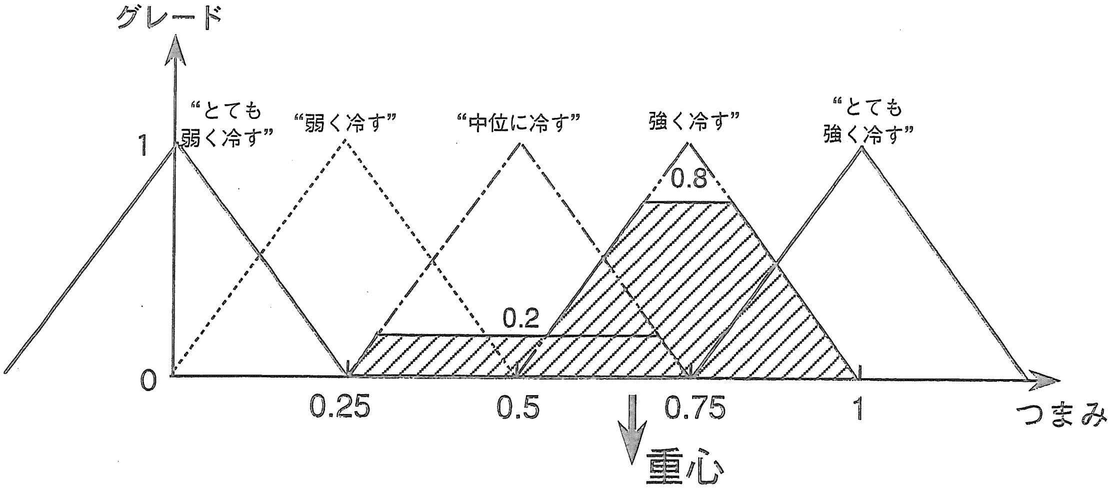


図 10　つまみの位置

とします。ここでは，ルールの適合度と室温に関するメンバーシップのグレードは一致しています。次に，図 10 に示す演算をします。ルール R^2 の適合度が 0.8 であるので “強く冷す” のメンバーシップ関数の頭を 0.8 で切り落とします。“中位に冷す” のメンバーシップ関数についても同様に頭を切り落とします。残った台形部分が各ルールの推論値となります。2 つの推論値が得られましたので，ここで各ルール間の調整をします。この調整は各メンバーシップ関数の最大値を取る合成演算により行います。式で書きますと

$$\text{つまみの位置} = (\mu_{\text{“強く冷す”}}(\text{つまみ}) \wedge \omega_2) \vee (\mu_{\text{“中位に冷す”}}(\text{つまみ}) \wedge \omega_3) \tag{12}$$

と表現されます。∧は最小値を求める演算であり，前述の頭切り演算です。∨は最大値を求める演算です。　以上により，つまみの位置がファジィ集合として得られました。このままでは，コンピュータにはつまみの位置が分からないので，図の斜線部の重心位置をつまみの位置とします。

実現されたつまみと温度の関係は図 11 のようになります。この図から明らかになったことは，集合の境界をあいまいにし，Mamdani の推論法を用いることで，ルール間の滑らかな補間を実現できたことです。この滑らかな補間はファジィ推論の一つの特徴です。また，ファジィ集合はベテランのさじ加減をコンピュータに取り込む有力なツールです。例えば，ベテランは，“ちょうど良い” あたりをきめ細かく制御し，“暑い” “寒い” ところはおおざっぱに制御していたとします。 この加減をファジィ制御に取り込むには，図 12 に示すような調整をメンバーシップ関数に対して行うことで実現できます。26. 5 ℃から 27.5 ℃の間のメンバーシップ関数を細くし，その外側を拡げてい

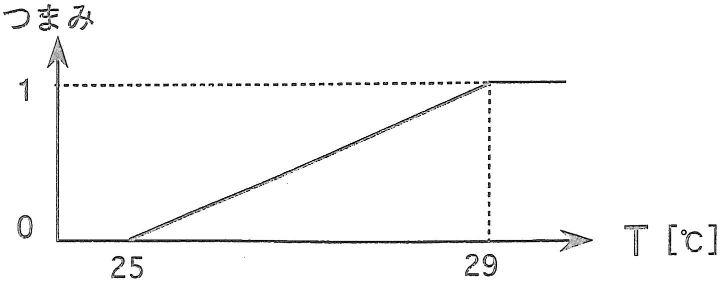


図 11　部屋の温度とつまみの関係（ファジイ制御）

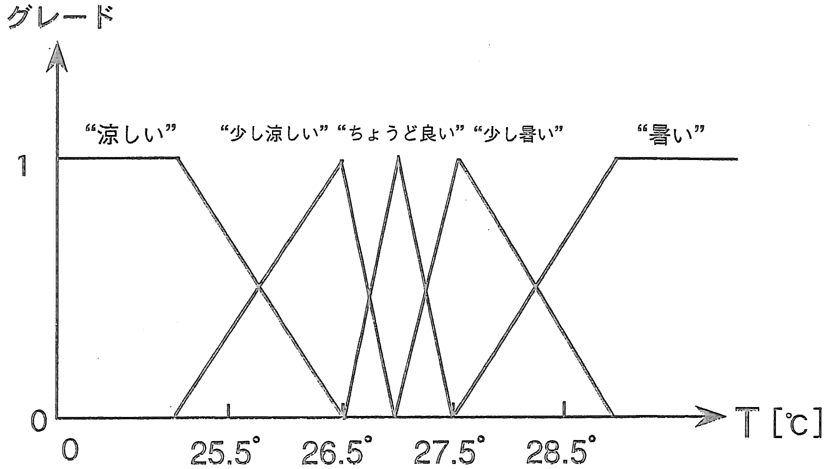


図 12　メンバーシップ関数の良い加減の調整

ます。図 13 は得られた室温とつまみの関係を示します。図からは，注目している区間ではつまみの変化を大きくし，それ以外のところではだいたい“強く”もしくは“弱く”する制御がたしかに実現できていることが分かります。

Mamdani の推論法は，それを用いた制御器設計が容易であり，しかも，その制御結果がとても良かったことから，良いとされています。しかし，なぜこの推論法が良いのか，理論的な根拠はありません。ファジィ推論法は，現在，様々なバリエーションが提案され，まことに融通無碍です。基本的に，それまで出せなかった性能が出せた，もしくは，それまでより簡単に作れるようになった等のメリットがあれば，工学的には意味があります。この融通無碍であるところも，ファジィ推論法の特徴です。

（b） 2 入力への拡張

さて，III の 1 節で紹介したベテランのルールは少し単純過ぎました。例えば，

$$R^3\text{: } If \text{“ちょうど良い”} \ Then \text{“中位に冷す”} \tag{13}$$

というルールでは，今ちょうど良くても実は暑くなりつつあるのかも知れません。少し暑くなって

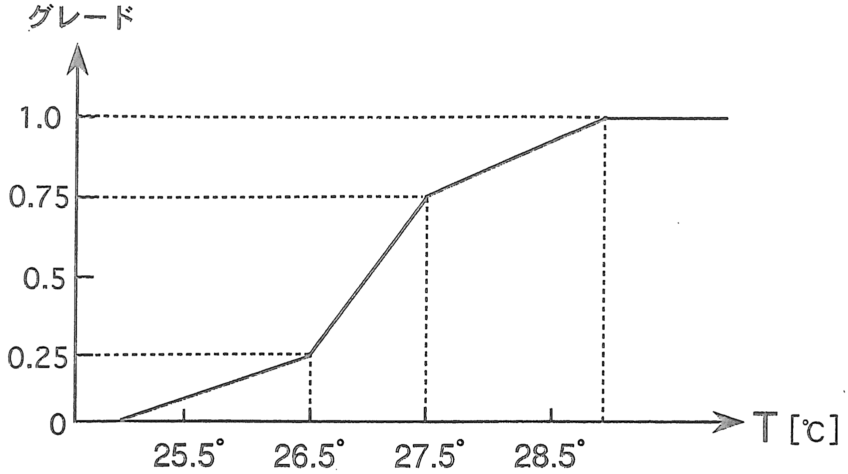


図 13　部屋の温度とつまみの関係（メンバーシップ関数調整後）

から

$$R^2 : If \text{“少し暑い”}\ Then \text{“強く冷す”} \tag{14}$$

では，少し間が抜けています。これまでのルールは実は素人のルールでした。室温の変化分まで考慮して，今ちょうど良くても“少し上昇中”あれば強く冷すことにすれば，制御はきめ細かくなり，確かにベテランらしい制御に近づきます。表 1 は室温の変化分 ΔT[℃／分] を新たに考慮して作成したルール表を示します。温度変化は“下降”“少し下降”“零”“少し上昇”“上昇”の 5 つの言葉で表現しています。表の左上から右へと順番に番号をつけていきますと，表の中央のルール R^{13} およびその右隣のルール R^{14} は

表1　ファジイルール表

T \ $\triangle T$	下降	少下	零	少上	上昇
涼	弱弱	弱弱	弱弱	弱	中冷
少涼	弱弱	弱弱	弱	中冷	強
ちょうど	弱	弱	中冷 ω 13	強 ω 14	強強
少暑	弱	中冷	ω 18 強	ω 19 強強	強強
暑	中冷	強	強強	強強	強強

$$
\begin{aligned}
&R^{13}: If \text{“ちょうど良い”}\ and\ \text{“温度変化が零”}\ Then\ \text{“中位に冷す”}\\
&R^{14}: If \text{“ちょうど良い”}\ and\ \text{“温度が少し上昇”}\ Then\ \text{“強く冷す”}
\end{aligned}
\qquad (15)
$$

というものです。室温とつまみに関しては前節と同じメンバーシップ関数を使うことにします。新たに温度変化に関するメンバーシップ関数を定義する必要があります。図 14 はこれらのメンバーシップ関数の例と，実際に室温 27.8 ℃，室温の変化 0.35 ℃／分が与えられたときのファジィ推論の方法を示しています。各メンバーシップのグレードは

$$
\begin{aligned}
&\mu_{\text{“少し暑い”}}(27.8\ ℃) = 0.8\\
&\mu_{\text{“ちょうど良い”}}(27.8\ ℃) = 0.2\\
&\mu_{\text{“零”}}(0.35\ ℃／分) = 0.3\\
&\mu_{\text{“少し上昇”}}(0.35\ ℃／分) = 0.7
\end{aligned}
\qquad (16)
$$

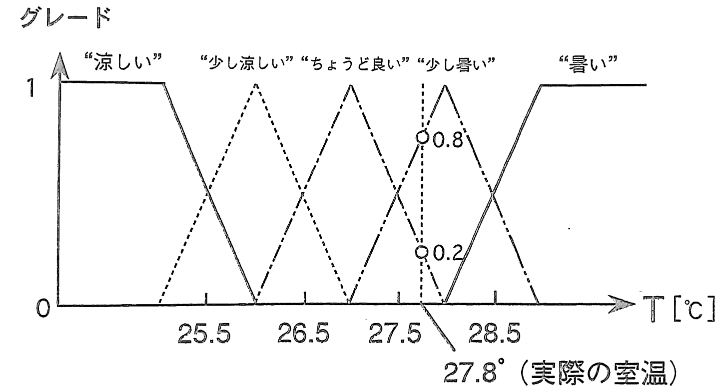
です。関係するルールは，R^{13}，R^{14} と

$$
\begin{aligned}
&R^{18}: If \text{“少し暑い”}\ and\ \text{“温度変化が零”}\ Then\ \text{“強く冷す”}\\
&R^{19}: If \text{“少し暑い”}\ and\ \text{“温度が少し上昇”}\ Then\ \text{“とても強く冷す”}
\end{aligned}
\qquad (17)
$$

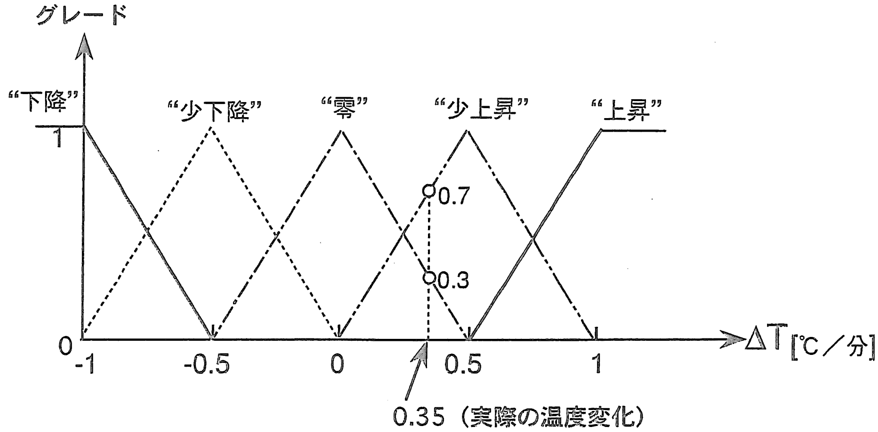
の 4 つです。各ルールの適合度は

$$
\begin{aligned}
\omega_{13} &= \mu_{\text{“ちょうど良い”}}(27.8\ ℃) \wedge \mu_{\text{“零”}}(0.35\ ℃／分) &= 0.2 \wedge 0.3 = 0.2\\
\omega_{14} &= \mu_{\text{“ちょうど良い”}}(27.8\ ℃) \wedge \mu_{\text{“少し上昇”}}(0.35\ ℃／分) &= 0.2 \wedge 0.7 = 0.2\\
\omega_{18} &= \mu_{\text{“少し暑い”}}(27.8\ ℃) \wedge \mu_{\text{“零”}}(0.35\ ℃／分) &= 0.8 \wedge 0.3 = 0.3\\
\omega_{19} &= \mu_{\text{“少し暑い”}}(27.8\ ℃) \wedge \mu_{\text{“少し上昇”}}(0.35\ ℃／分) &= 0.8 \wedge 0.7 = 0.7
\end{aligned}
\qquad (18)
$$

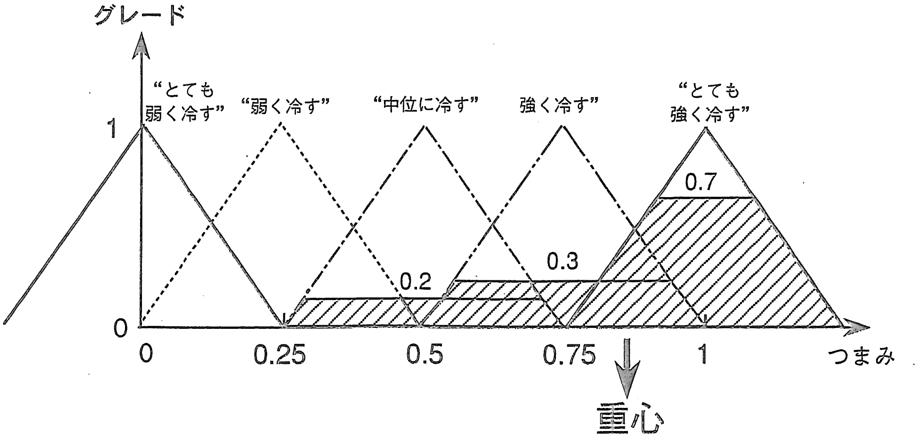
と求められます。そして，つまみの位置は



(a) 室温のメンバーシップ関数



(b) 室温変化のメンバーシップ関数



(c) つまみのメンバーシップ関数

図 14　つまみの位置

$$
\text{つまみの位置} = (\mu_{\text{“中位に冷す”}}(\text{つまみ}) \wedge \omega_{13}) \vee (\mu_{\text{“強く冷す”}}(\text{つまみ}) \wedge \omega_{14}) \vee (\mu_{\text{“強く冷す”}}(\text{つまみ}) \wedge \omega_{18}) \vee (\mu_{\text{“とても強く冷す”}}(\text{つまみ}) \wedge \omega_{19}) \tag{19}
$$

となります。この重心位置が最終的なつまみの位置です。

以上の Mamdani の推論法は，適合度を Minimum 演算で求め，つまみの位置（推論値）を Maximum 演算と重心法により求めていることから，Min - Max - 重心法とも呼ばれます。

IV. まとめ

ファジィ集合は境界をあいまいにした集合です。私たちが日常使用している言葉に対応する事柄（例えば，私たちの感覚など）はあいまいな広がりを持っています。ファジィ集合はこの広がりのある事柄と記号である言葉との関係を自然に近い形で表現する有効な手段です。 本稿では，ファジィ集合の基本的な考え方と，ファジィ集合の工学的応用であるファジィ制御とファジィ推論について解説しました。ファジィ理論はファジィ集合論，ファジィ論理と推論，ファジィ測度論など幅広い研究の展開がなされています。また，経済学，心理学，教育学から医学，工学まで応用研究も盛んです。本稿でファジィ理論に興味を持ち，さらに専門書に進まれる方が少しでも多く現れれば，筆者にとって大きな喜びです。

（ふるはし たけし：名古屋大学工学研究科電子情報学専攻）
（うちかわ よしき：名古屋大学工学研究科電子情報学専攻）