

電波伝搬ノート

本稿掲載の Web ページ

http://www.mybook-pub-site.sakura.ne.jp/Radio_note/

古橋 武

目次

第1章	はじめに	2
第2章	疑問	3
2.1	疑問 I 電波が自力で帰ってくる？	3
2.2	疑問 II E と H がどう相互作用して電波は伝搬する？	4
2.3	疑問 III アンテナ近傍で E と H の位相差は 90° なのに、遠方では同相	5
2.3.1	アンテナ近傍では E と H の位相差は 90°	5
2.3.2	遠方では E と H は同相	5
第3章	疑問 II に対する筆者の解答	7
3.1	参考サイト	7
3.2	E_x の時間変化が H_y を z 方向に押し出す	7
3.3	H_y の時間変化が E_x を z 方向に押し出す	9
第4章	疑問 III に対する解答	10
4.1	電流ダイポールによる電磁界	10
4.2	放射界	11
4.3	誘導界	11
4.4	ダイポールアンテナによる電磁界	13
4.5	数値計算による電磁界の可視化	14
4.5.1	電界計算 (図 2.5 の再現)	14
4.5.2	電界の成分内訳	16
4.5.3	電界の z 軸上成分内訳	17
4.5.4	z 軸上の電磁界の時間変化	18
第5章	新たな疑問	20
5.1	$1/r, 1/r^2$ 項は何によって生成される？	20
5.2	H_ϕ の $1/r$ の項は J が押し出す？	20
5.3	放射界 ($1/r$ の項) はファラデーの法則とアンペアの法則を満たす？	22
5.4	ビオ・サバルの法則による磁界の時間変化により $1/r^2$ 項が誘起される？	25
5.5	第5章のまとめ	27
索引		28
参考文献		29

第1章 はじめに

電波は電界と磁界の相互作用で伝わることの直感的説明が電磁気学の書籍，そしてネットにてなされています。しかし，その多くが間違っているのではないか？不正確ではないか？と疑問に思うようになりました。筆者自身もかつて間違った記事を書いてしまいました。恥ずかしい限りです。その疑問を本稿にまとめ，筆者の（正しい）理解を記します。読者のご感想，ご意見を歓迎します。

なお，筆者は電磁波工学の素人です。最近，浅学もかえりみず，電磁気学の教材作りの機会を得たので，学部生のときに学んだ知識を基に，手元の数冊の電磁気学の本と名古屋大学中央図書館の蔵書とネット情報を頼りに執筆を進めました。その過程で，電波伝搬の仕組みに関する記述に大きな疑問を抱いた次第です。

第2章 疑問

2.1 疑問I 電波が自力で帰ってくる？

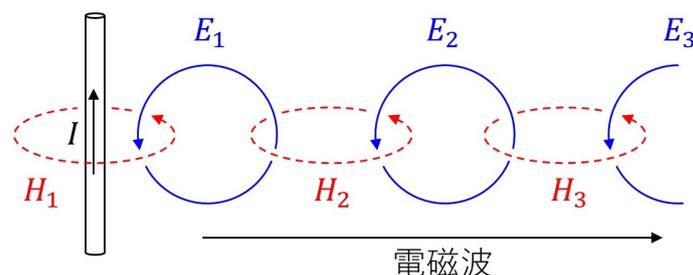


図 2.1: 電波伝搬のイメージ

図 2.1 は、電磁気学の本およびネット上のサイトに散見される電波伝搬のイメージです。まず、電流 I の変化がアンペールの法則により磁界 H_1 を誘起します。次に H_1 の変化が電界 E_1 を誘起します。そして E_1 の変化が H_2 を誘起し、... と、この繰り返しのより電界、磁界が空間を伝搬していきます。筆者はこれと同じ説明を文献 [1] に書きました。

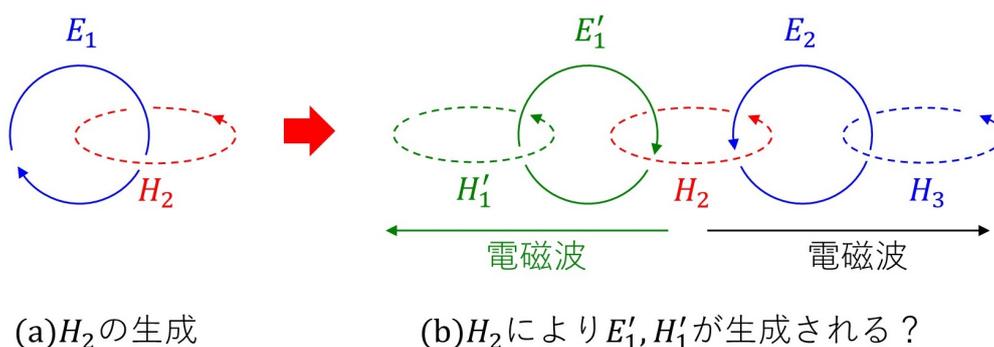


図 2.2: 電波伝搬のイメージ（電波が帰ってくる？）

図 2.1 の説明の致命的な欠陥は、「電磁波が自力で帰って来られる。」ことです。図 2.2 にその様子を示します。同図 (a) は E_1 の変化が H_2 を誘起しています。図 2.1 では H_2 の変化が E_2 を誘起するとして、電波伝搬を説明しました。しかし、誘起される電界は、なぜ、右方向のみに限定されるのでしょうか？図 2.1 を載せている電磁気学の本、ネット上のサイトには説明がありません。 H_2 の変化は H_2 の周上のどこでも起きているのですから、図 2.2(b) のように H_2 の変化により E'_1 が誘起されると考えてもよさそうです。そうすると、

E_1' の変化により H_1' が誘起されます。図 2.1 のイメージ図では、電波が自力で帰って来られます。現実には電波(放射界)は直進し、媒質による屈折、反射がなければ、帰ってくることはありません。

2.2 疑問II E と H がどう相互作用して電波は伝搬する？

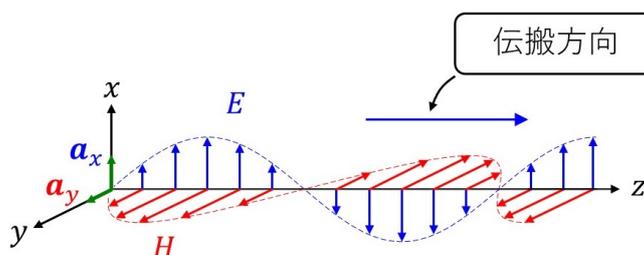


図 2.3: z 方向に伝搬する平面波

図 2.3 は多くの本に掲載されている平面波の伝搬の様子です。電界 E と磁界 H が時間とともに z 軸方向に伝搬しています。青い破線が E , 赤い破線が H です。そして、青い矢印は z 軸上の電界ベクトル E の例です。赤い矢印は同じく磁界ベクトル H の例です。 E は $x-z$ 面内にあり、 H は $y-z$ 面内にあります。 a_x を x 軸方向の単位ベクトル、 a_y を y 軸方向の単位ベクトルとすると、 E, H は

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= E_m \sin \omega \left(\frac{z}{c} - t \right) \mathbf{a}_x \\ \mathbf{H} &= H_m \sin \omega \left(\frac{z}{c} - t \right) \mathbf{a}_y \end{aligned} \quad (2.1)$$

と表されます。 E_m, H_m はそれぞれ電界、磁界の振幅、 ω は角周波数、 c は光の速さ、 t は時間です。上式において $t=0$ とすると図 2.3 の破線の波形が得られます。平面波では E, H は同相です。

図 2.3 の図に対する疑問は、「 E, H がどのように相互作用して互いを z 軸方向に押し出すのか？」です。電磁気学の書籍における最も多い説明が、マックスウェルの方程式から波動方程式の導出です。波動方程式が得られたのだから E, H は波として伝搬すると説明されます。筆者はうかつにも、学生のときには、これで理解した気になっていました。力学において波動方程式を既に学んでいたのだから、電磁界において同様の式が導出されたことに、たぶん(?)感動していました。

しかし、最近、電磁気学の教材を作製する立場になって、改めて図 2.3 を見たときに、そして、次式のファラデーの法則とアンペアの法則を眺めたときに、相互作用の仕組みがわかっていなかったことに気づきました。

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{d\mathbf{B}}{dt} \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \frac{d\mathbf{D}}{dt} \end{aligned} \quad (2.2)$$

繰り返しますが、「 E と H が互いを押し出す仕組みを (2.2) 式からどう説明できるでしょうか？」(2.2) 式から波動方程式が導出されるのですから、これらの式の中に電波伝搬の仕組みがあるはずですよ。

2.3 疑問 III アンテナ近傍で E と H の位相差は 90° なのに、遠方では同相

2.3.1 アンテナ近傍では E と H の位相差は 90°

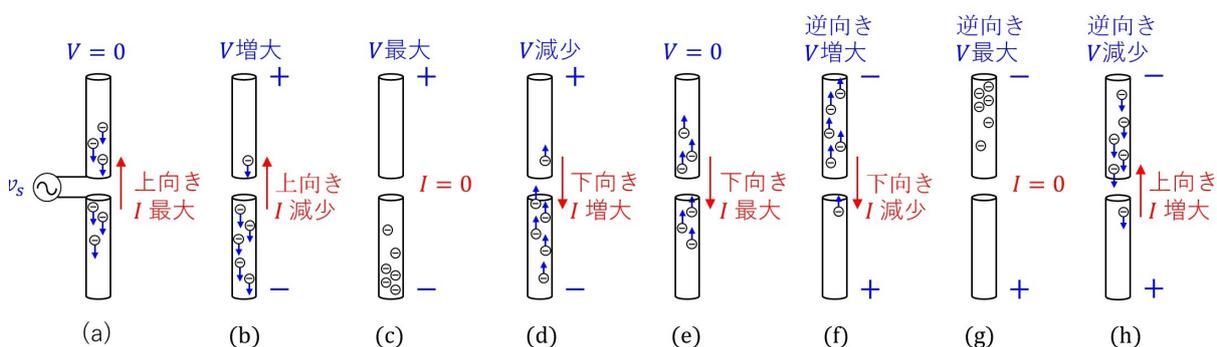


図 2.4: ダイポールアンテナ上の電圧・電流の変化のようす

図 2.4 は、半波長ダイポールアンテナ上の電圧・電流の変化の様子を示します。 v_s は高周波信号電圧源です。この電圧の 1 周期を 8 等分して、(a) から (h) に 45° ごとの電圧・電流を示します。電圧源は (a) のみに描き、(b)~(h) では省略してあります。(a) は電子が上から下に流れていて、上向きの電流 I が最大のときです。このとき、アンテナの上側と下側の電子の分布はほぼ同じであり、アンテナ両端電圧 $V = 0$ です。(b) は、(a) の時点から 45° 相当の時間が経過したときの、 I と V です。上向き電流 I は減少し、両端電圧 V は増大しています。(c) は (a) から 90° 相当の時間が経過したときを示します。電子はアンテナの下端に集まって停止状態にあり、 $I = 0$ です。このとき両端電圧 V が最大です。その後、電子は上向きに逆流を始め、(d) では下向きの電流 I が増大し、 V は減少しています。そして、(a) から 180° 相当の時間が経過した (d) にて下向き I 最大、 $V = 0$ です。(f) では電子がアンテナ上側に集まり始めて、逆向き V が増大しています。

半波長ダイポールアンテナにおいて、 V と I は位相が 90° ずれます。 V により電界 E が生成され、 I により磁界 H が生成されます。従って、「 E と H は位相が 90° ずれる」と説明されます。

2.3.2 遠方では E と H は同相

図 2.5 はダイポールアンテナが生成する電磁界を示します。高校物理の教科書 [2] に掲載されていた図とほぼ同じです。(a)~(f) は、図 2.4 の (a)~(f) に対応しています。赤い

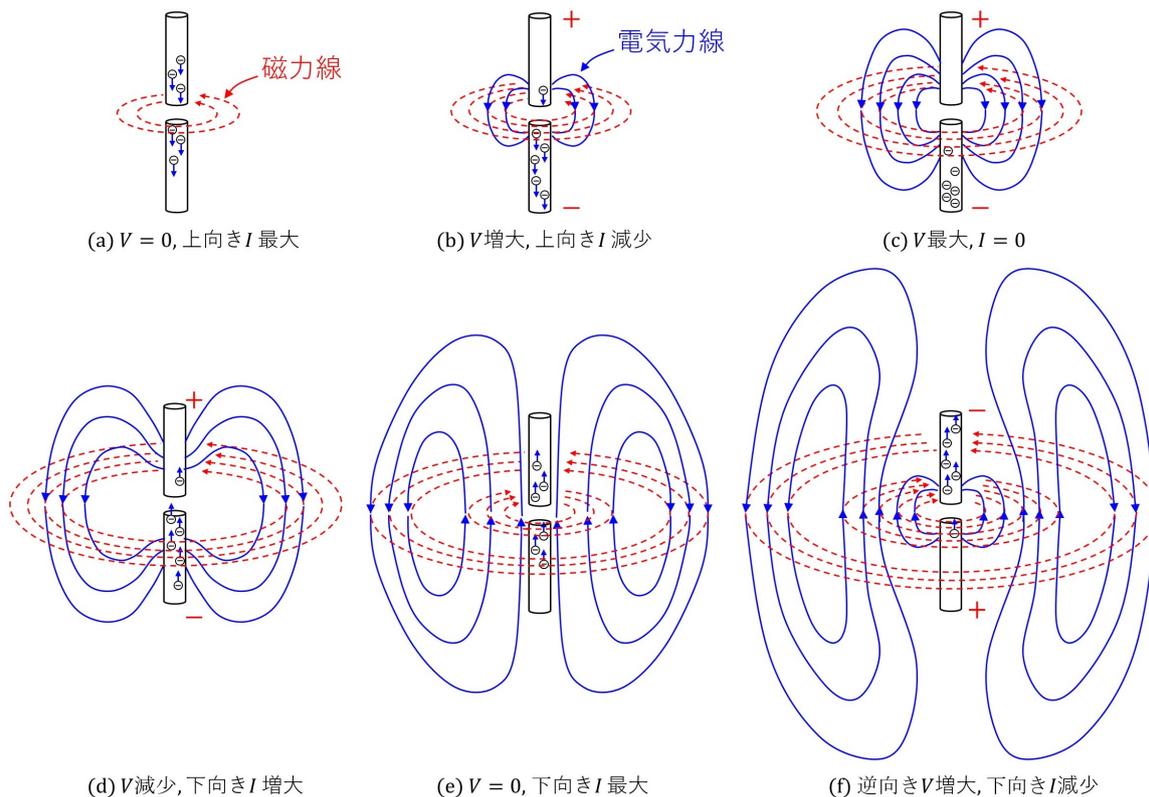


図 2.5: ダイポールアンテナが生成する電磁界

破線が**磁力線**，青い実線が**電気力線**です．(a)では上向き電流 I が最大です．アンペアの法則により，この I から磁力線が生成されます．(b)では，時間の経過とともにこの磁力線の形成される範囲が広がっています．(b)ではアンテナ両端の電圧 V が増大します．すなわち，アンテナ導体内で上側では+電荷が多くなり，下側では-電荷が多くなっています．これにより上側から下側へと向かう電気力線が生成されます．この電気力線はアンテナ導体の左右だけでなく，前後左右 360° の方向に生成されます．(c)では磁力線の範囲が外側にさらに広がっています．しかし，このとき $I = 0$ なので内側に新たに生成される磁力線はありません．一方，電気力線は，内側に新たに生成されます．(a)~(c)では，磁力線と電気力線の**位相が 90° ずれて描かれています**．

さらに時間が経過した (f) では (a), (b) のときに生成された磁力線，電気力線はアンテナからさらに遠ざかっています．そして，最遠のそれぞれ3本の磁力線，電気力線は**同相になっています**．(a)~(c)で描かれていた 90° の位相ずれは，磁力線，電気力線がアンテナから遠ざかるにつれて消えています．

第3章 疑問IIに対する筆者の解答

3.1 参考サイト

疑問Iについては、「図 2.1 のイメージ図は図 2.2 の理由で間違っている」と結論づけて、これ以上論じません。

疑問IIに対する筆者の解答を以下に記します。この答えを探して、名古屋大学中央図書館の電磁気学、電磁波工学に関する 250 冊近い蔵書とネット上のサイトを当たりました。筆者の読解力の無さによる可能性を否定できませんが、筆者が納得する解説は見つけれませんでした。唯一、示唆に富んだ記述が

電磁波の伝搬

http://fnorio.com/0067Electromagnetic_wave1/Electromagnetic_wave1.html

にありました。筆者の解答はこのサイトの内容によるところが大きいです。

3.2 E_x の時間変化が H_y を z 方向に押し出す

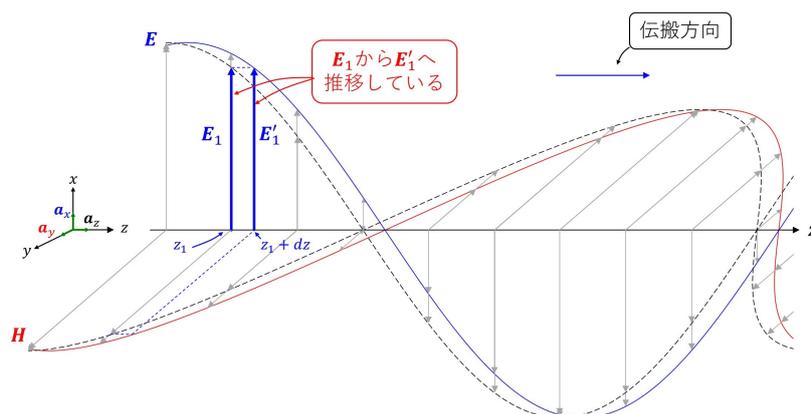


図 3.1: 平面波の微小距離 dz の伝搬

図 3.1 は (2.1) 式を満たす平面波が微小距離 dz を伝搬する様子を示します。図 2.3 と同様に、電界 \mathbf{E} は $x-z$ 平面内にあり、磁界 \mathbf{H} は $y-z$ 平面内にあります。 \mathbf{E} と \mathbf{H} が、破線の波形から微小時間 dt 後に dz だけ z 方向に移動して、実線の波形になります。座標 z_1 における電界ベクトル \mathbf{E}_1 は、 dt 後には $z_1 + dz$ に平行移動して \mathbf{E}'_1 になります。

(2.2) 式において, $\mathbf{E} = (E_x(z, t), 0, 0)$, $\mathbf{H} = (0, E_y(z, t), 0)$ とすると,

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_x(z, t)}{\partial z} &= -\mu_0 \frac{dH_y(z, t)}{dt} \\ \frac{\partial H_y(z, t)}{\partial z} &= -\epsilon_0 \frac{dE_x(z, t)}{dt} \end{aligned} \quad (3.1)$$

を得ます. ただし, 平面波は真空中にあるとします. μ_0, ϵ_0 はそれぞれ真空中の透磁率, 誘電率です. (2.1) 式は上式の関係を満たします.

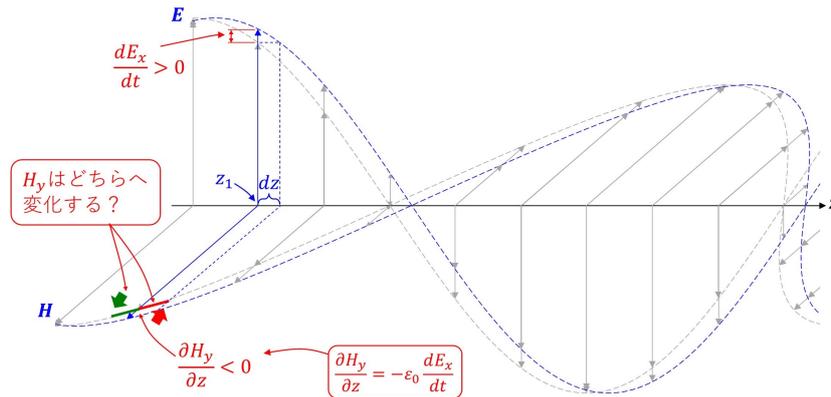


図 3.2: dE_x/dt と $\partial H_y/\partial z$ の関係

図 3.2 は dE_x/dt と $\partial H_y/\partial z$ の関係を示します. $\mathbf{E} = E_x \mathbf{e}_x$ が z 方向に進んでいるとします. すると, 座標 z_1 における電界 E_x は増加します.

$$\frac{dE_x}{dt} > 0 \quad (3.2)$$

です. このとき (3.1) 式の第 2 式により

$$\frac{\partial H_y}{\partial z} < 0 \quad (3.3)$$

となります. E_x の時間変化は, H_y を $-z$ 方向に増加 (図中の緑線, 緑の矢印で示します.) させる, もしくは, z 方向に減少 (同赤線, 赤の矢印で示します.) させます.

図 3.3 において, $\mathbf{H} = H_y \mathbf{e}_y$ も z 方向に進んでいるとすると, z_1 における dH_y/dt の符号も

$$\frac{dH_y}{dt} > 0 \quad (3.4)$$

となります. この増加分 $|dH_y/dt|dt$ を, 上述の赤線成分 $|\partial H_y/\partial z|dz$ が相殺すると, z_1 における磁界 \mathbf{H}_1 は $z_1 + dz$ の位置に平行移動して \mathbf{H}'_1 となり, その大きさは \mathbf{H}_1 と変わりません. 磁界の持つエネルギーは不変です. すなわち, E_x の時間変化が H_y を z 方向に押し出し, しかも, 必要なエネルギーは 0 です. \mathbf{H} が z 方向に進んでいるとした仮定とも矛盾しません. 一方, 緑線の成分は, 増加する \mathbf{H} をさらに増加させることとなりますが, それにはエネルギーが必要です. しかし, どこからもエネルギーの供給はないので, 緑線の成分は \mathbf{H} を変化させられません.

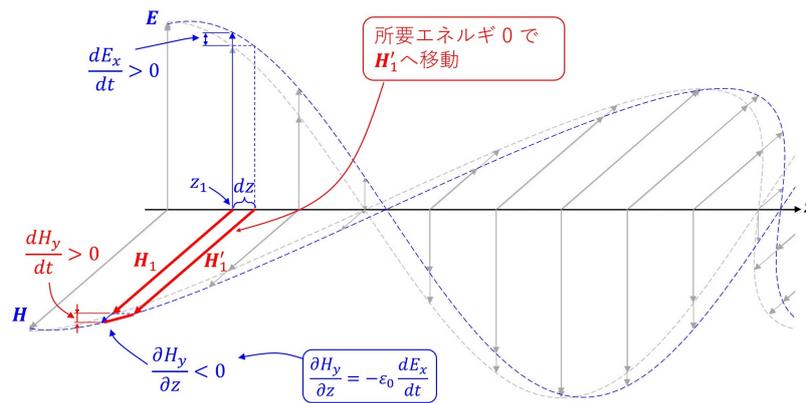


図 3.3: $|dH_y/dt|dt = |\partial H_y/\partial z|dz$ の関係

3.3 H_y の時間変化が E_x を z 方向に押し出す

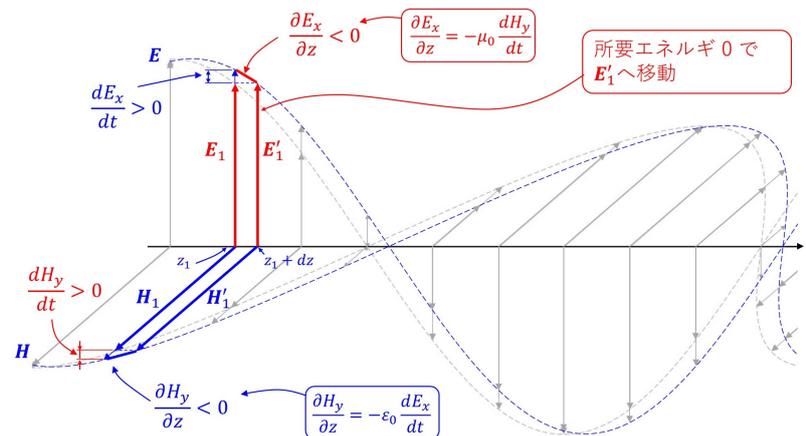


図 3.4: dH_y/dt と $\partial E_x/\partial z$ の関係

図 3.4 は dH_y/dt と $\partial E_x/\partial z$ の関係を示します。 $\mathbf{H} = H_y \mathbf{e}_y$ が z 方向に進んでいるとします。座標 z_1 における磁界 H_y は増加します ((3.4) 式)。 (3.1) 式の第 1 式より

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} < 0 \tag{3.5}$$

です。 H_y の時間変化は、 E_x を $-z$ 方向に増加させるか、もしくは、 z 方向に減少させます。 図 3.4 において、 $\mathbf{E} = E_x \mathbf{e}_x$ も z 方向に進んでいるとすると、磁界の場合と同様の説明が成立します。 z_1 における電界 \mathbf{E}_1 が $z_1 + dz$ の位置に平行移動して \mathbf{E}'_1 となり、その大きさは変わりません。電界の持つエネルギーは不変です。すなわち、 H_y の時間変化が E_x を z 方向に押し出し、要するエネルギーは 0 です。 \mathbf{E} が z 方向に進んでいるとする仮定と矛盾しません。

第4章 疑問IIIに対する解答

4.1 電流ダイポールによる電磁界

疑問 III に対する解答は電磁波工学の書籍やネット上に記されています。

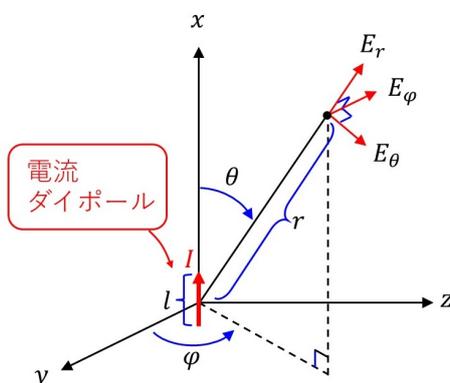


図 4.1: 電流ダイポールと球座標系

図 4.1 は電流ダイポールと球座標上の電界を示します。 x, y, z 座標の配置が多くの書籍とは異なっているかも知れませんが、単に、これから論じる電波伝搬の方向を前章の z 軸に合わせたいだけの理由からです。 E_r, E_θ, E_ϕ はそれぞれ r 方向, θ 方向, ϕ 方向の電界の強さです。 x 軸に沿って、長さ l の短い部分（領域）に電流 I が矢印の向きに一様に流れているとします。長さ l の中間が原点にあります。この短い部分（電流）が電流ダイポールと呼ばれます。また、 Il は電流モーメントと呼ばれます。

導出の過程は省略して結論だけを記します。電流 I が角周波数 ω で時間とともに変化しているとする、この電流ダイポールによる電磁界の各成分は、

$$\begin{aligned}
 E_r &= \omega\mu_0 \frac{Il}{4\pi} \left(\frac{2}{k_0 r^2} - j \frac{2}{k_0^2 r^3} \right) \cos\theta \cdot e^{-jk_0 r} \\
 E_\theta &= \omega\mu_0 \frac{Il}{4\pi} \left(j \frac{1}{r} + \frac{1}{k_0 r^2} - j \frac{1}{k_0^2 r^3} \right) \sin\theta \cdot e^{-jk_0 r} \\
 H_\phi &= k_0 \frac{Il}{4\pi} \left(j \frac{1}{r} + \frac{1}{k_0 r^2} \right) \sin\theta \cdot e^{-jk_0 r} \\
 E_\phi &= 0, \quad H_r = 0, \quad H_\theta = 0
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

と求められています。真空中の場合です。 $k_0 (= 2\pi/\lambda)$ は波数、 λ は波長です。 j は交流回路論の虚数単位です。上式の電磁界は、交流回路論の電圧・電流と同様に、瞬時値に変換

できます。例えば E_r の瞬時値を $E_r(t)$ とすると

$$E_r(t) = \omega\mu_0 \frac{Il}{4\pi} \sqrt{\left(\frac{2}{k_0 r^2}\right)^2 + \left(\frac{2}{k_0^2 r^3}\right)^2} \cos\theta \cdot \cos\left\{\omega t - k_0 r - \tan^{-1}\left(\frac{1}{k_0 r}\right)\right\} \quad (4.2)$$

です。

4.2 放射界

(4.1) 式は複雑ですが、大きく二つの成分に分けられます。同式中の $1/r$ を含む項（赤字の項）を抜き出すと

$$\begin{aligned} E_\theta &= j\omega\mu_0 \frac{Il}{4\pi r} \sin\theta \cdot e^{-jk_0 r} \\ H_\varphi &= jk_0 \frac{Il}{4\pi r} \sin\theta \cdot e^{-jk_0 r} \end{aligned} \quad (4.3)$$

です。これらは

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} &\gg \frac{1}{k_0 r^2} \\ r &\gg \frac{\lambda}{2\pi} \end{aligned} \quad (4.4)$$

のときに成立します。電界と磁界は同相で、それぞれ θ 方向成分、 φ 方向成分しかないので直交します。 $\theta = \varphi = \pi/2$ とし、 r を十分に大きくとると、(4.3) 式は (2.1) 式の平面波に近い形になります。この式が表している電磁界は放射界と呼ばれます。また、 r が大きいときに成立するので、遠方界とも呼ばれます。

放射界における E_θ, H_φ の特徴は、以下の通りです。

- 直交している、
- 同相である。
- 電流に対して位相が 90° 進んでいる。

4.3 誘導界

(4.1) 式の残りの項から

$$\begin{aligned} E_r &= -j\omega\mu_0 \frac{Il}{4\pi} \left(\frac{2}{k_0^2 r^3}\right) \cos\theta \cdot e^{-jk_0 r} \\ E_\theta &= -j\omega\mu_0 \frac{Il}{4\pi} \left(\frac{1}{k_0^2 r^3}\right) \sin\theta \cdot e^{-jk_0 r} \\ H_\varphi &= \frac{Il}{4\pi r^2} \sin\theta \cdot e^{-jk_0 r} \end{aligned} \quad (4.5)$$

を抜き出します。
これらの項は

$$r \ll \frac{\lambda}{2\pi} \tag{4.6}$$

のときの主要成分で、誘導界¹と呼ばれます。電流ダイポールに近いところで成立する電磁界なので近傍界とも呼ばれます。電流ダイポールの近傍では、電界は磁界に対して位相が90°遅れます。電磁波電力がダイポールから出たり、戻ったりしていることを表します。誘導界と呼ばれるゆえんです。

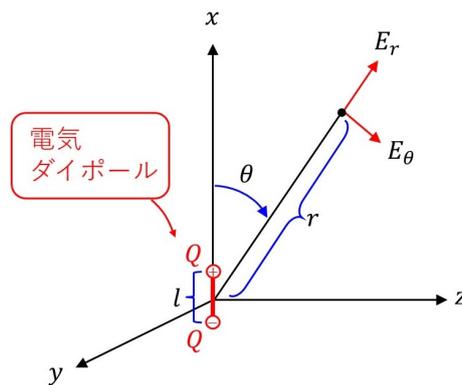


図 4.2: 静電気学における電気ダイポールによる電界

(4.5) 式の E_r, E_θ の項は、静電気学によると電気ダイポールから得られます。図 4.2 は原点におかれた電気ダイポールと電界 E_r, E_θ の関係を示します。電荷 Q は電流 I の時間による積分値です。交流回路論では、 $Q = I/(j\omega)$ です。静電気学によると E_r, E_θ は次式により与えられます。

$$\begin{aligned} E_r &= \frac{Ql \cos \theta}{2\pi\epsilon_0 r^3} \\ E_\theta &= \frac{Ql \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}. \end{aligned} \tag{4.7}$$

ここで、

$$\begin{aligned} -j\omega\mu_0 \frac{Il}{2\pi k_0^2} &= -j\omega\mu_0 \frac{Il}{2\pi \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2} = -j\omega\mu_0 \frac{Il}{2\pi \left(\frac{2\pi f}{c}\right)^2} = -j\omega\mu_0 \frac{Il}{2\pi (\omega\sqrt{\epsilon_0\mu_0})^2} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{Il}{j\omega} \\ &= \frac{Ql}{2\pi\epsilon_0} \end{aligned} \tag{4.8}$$

の関係があります。ただし、 c は光の速さ、 f は電磁波の周波数、 $c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$ です。 r が小さく、 $e^{-k_0 r} \approx 1$ において、(4.5) 式の E_r, E_θ は (4.7) 式と一致します。

¹この用語は文献によって異なります。本稿では文献 [3] の用語を採用します。電子情報通信学会編の文献 [4] では $1/r^2$ の項を誘導界、 $1/r^3$ の項を静電界と呼びます。ネットでもこのように分ける呼び方が主流のようです。ただし、 $1/r^2$ の項を誘導界と呼ぶことを批判している文献 [5](p.228) があります。文献 [3] の著者(故)雨宮好文先生は筆者の師匠です。不肖の弟子は、電磁波とは無縁の分野に進み、今となっては教えを請うこともかなわず、電磁波に関する疑問と格闘しています。

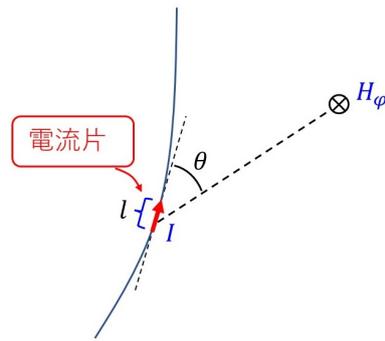


図 4.3: 定常電流による磁界

さらに、(4.5) 式の H_φ はビオ・サバルの式そのものです。図 4.3 に、ビオ・サバルの法則の説明においてよく見られる、定常電流 I が作る磁界 H_φ に関する各記号を示します。

(4.6) 式が成立するような $1/6$ 波長よりもさらに近い距離では、電流ダイポールによる電磁界は、静電界および定常電流による磁界からなっています。(4.3) 式の E_r, E_θ, H_φ の特徴は

- 互いに直交している。
- 磁界は電流と同相である。
- 電界は磁界より位相が 90° 遅れている。

です。

放射界の E_θ と誘導界の E_θ は位相が 180° ずれています。電気ダイポールにより生成される電界と、ビオ・サバルの法則（アンペアの法則）により生成される磁界が電波の起源であるかのような説明（例えば文献 [2]）は、端折りすぎです。

4.4 ダイポールアンテナによる電磁界

ダイポールアンテナは、電流 I の振幅が少しずつ違う電流ダイポールを、 z 軸に沿って原点对称に並べることで、モデル化できます。従って、ダイポールアンテナによる電磁界は、電流ダイポールによる電磁界で傾向を知ることができます。

疑問 III は図 2.5 において、

「アンテナ近傍では E と H は 90° 位相がずれているのに、遠方では同相となっている。なぜか？」

でした。(4.6) 式において λ は電磁波の波長です。

● $\lambda/2\pi$ より十分に近いところ

誘導解が主成分です。誘導解は静電界および定常電流による磁界からなります。これらの電界と磁界は位相が 90° ずれます。アンテナからの距離 r が大きくなると、これらの成分は急速に減衰します。

● $\lambda/2\pi$ より十分に遠いところ

放射界が主成分です。ここでは、電界と磁界は同相です。(4.3) 式の成分はアンテナ近傍においても存在しますが、近傍では大きな誘導界に隠されています。アンテナから離れるにつれて、誘導界が減衰し、放射界が現れてきます。

改めて図 2.5(a)~(c) の磁力線および電気力線を見ると、これらは誘導界であることがわかります。アンテナ近傍では電界は磁界より位相が $\pi/2$ 遅れています。(e), (f) では誘導界と放射界が混在して描かれています。アンテナから離れた電気力線と磁力線は同相に描かれています。図 2.5 は高校物理の教科書に参考として掲載されていましたが、高校生にはどのような説明がなされたのか気になります。

電波として飛んでいく放射界の磁界は誘導解の磁界より 90° 位相が進んでいます。また、放射界の電界は誘導解の電界とは位相が 180° 異なります。アンテナからの電磁界生成を説明している書籍、ネットの記事、YouTube の動画で、(4.1) 式抜きで、この近傍、遠方での位相差の違いを説明しているものを探しましたが、出会えていません。

4.5 数値計算による電磁界の可視化

4.5.1 電界計算 (図 2.5 の再現)

図 4.4 は電流ダイポールによる電界の数値計算結果です。(4.1) 式の E_r, E_θ の瞬時値式は以下のとおりです。

$$\begin{aligned} E_r(t, r) &= \sqrt{\left(\frac{2}{k_0 r^2}\right)^2 + \left(\frac{2}{k_0^2 r^3}\right)^2} \cos \theta \cos \left\{ \omega t - k_0 r - \tan^{-1} \left(\frac{1}{k_0 r} \right) \right\} \\ E_\theta(t, r) &= \sqrt{\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{k_0^2 r^3}\right)^2 + \left(\frac{1}{k_0 r^2}\right)^2} \sin \theta \cos \left\{ \omega t - k_0 r + \tan^{-1} \left(\frac{\frac{1}{r} - \frac{1}{k_0^2 r^3}}{\frac{1}{k_0 r^2}} \right) \right\} \end{aligned} \quad (4.9)$$

ただし、 $\omega\mu_0 \times I l / 4\pi$ は省略しています。 z 軸上に出発点を与えて、電界の接線方向をたどるやり方で電気力線を求めました。図 4.4 の (a)~(f) が図 2.5 の (a)~(f) に対応しています。各図は、(a) の位相を $\omega t = 0$ として、 $\pi/4$ ずつ位相が推移しています。(a) の瞬間を $t = 0$ として、 $\pi/4\omega$ ずつ時間が推移していると読み替えることもできます。図 2.5 の電気力線とほぼ同様の分布となるように出発点を選びました。ただし、ダイポールアンテ

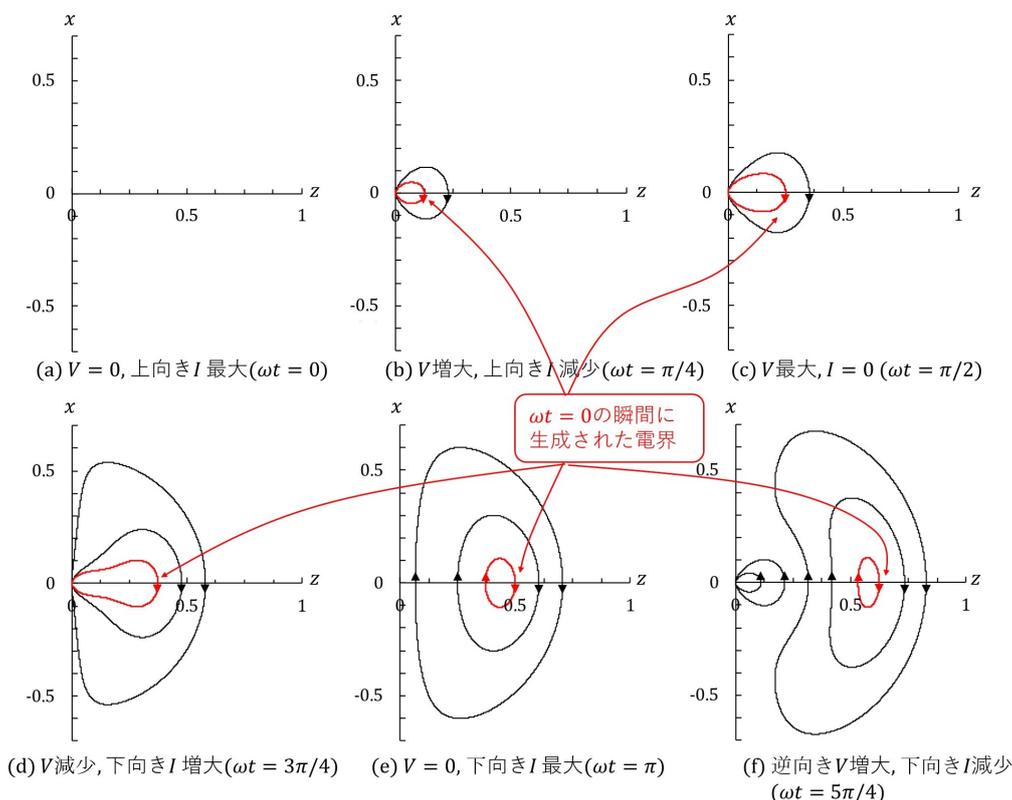


図 4.4: 電流ダイポールによる電界 ((a) $V = 0$ の瞬間にアンテナを出発した電気力線)

ナでは、アンテナ線に対して電気力線が垂直に出入りしていますが、電流ダイポールでは電気力線は電流線に直交していません。これは、電流ダイポールでは電流分布のみを想定した思考実験的な設定がなされていて、導体の境界条件が使われていないためです (文献 [3] p.138)。

横軸は z 軸、縦軸は x 軸です。座標は波長 λ で規格化してあります。数値 1 のところで、電流ダイポールからの距離が 1 波長分です。(b)~(f) において、赤線は (a) の $V = 0$ の瞬間にアンテナを出発した電気力線を表します。 z 軸と交差する力線は、(a) \rightarrow (b) \rightarrow (c) ... と進むにつれて、 z 軸上を $1/8$ 波長ずつ進んでいます。

図 4.5 は、図 4.4 の電界に、(c) V 最大の瞬間にアンテナを出発した電気力線を赤線で追加して示します。 z 軸と交差する力線は、(d) \rightarrow (e) \rightarrow (f) ... と、 z 軸上を $1/8$ 波長ずつ進んでいます。この電気力線の特徴は、(d) と (e) で位相が 180° 反転していることです。(d) にて、 $z = 1/8$ の位置における電気力線は下向き ($-x$ 方向) です。この電気力線は、(e) では $z = 2/8$ の位置に移動しています。そして、ここでは上向き (x 方向) へと反転しています。これは、アンテナ近傍では誘導界が優勢であり、アンテナから離れたところでは放射界が優勢となった結果です。一方、図 4.4 では、注目した電気力線の向きが変わらない場合でした。 $V = 0$ の瞬間に出発した電気力線なので、誘導界は出発時から優勢ではありませんでした。

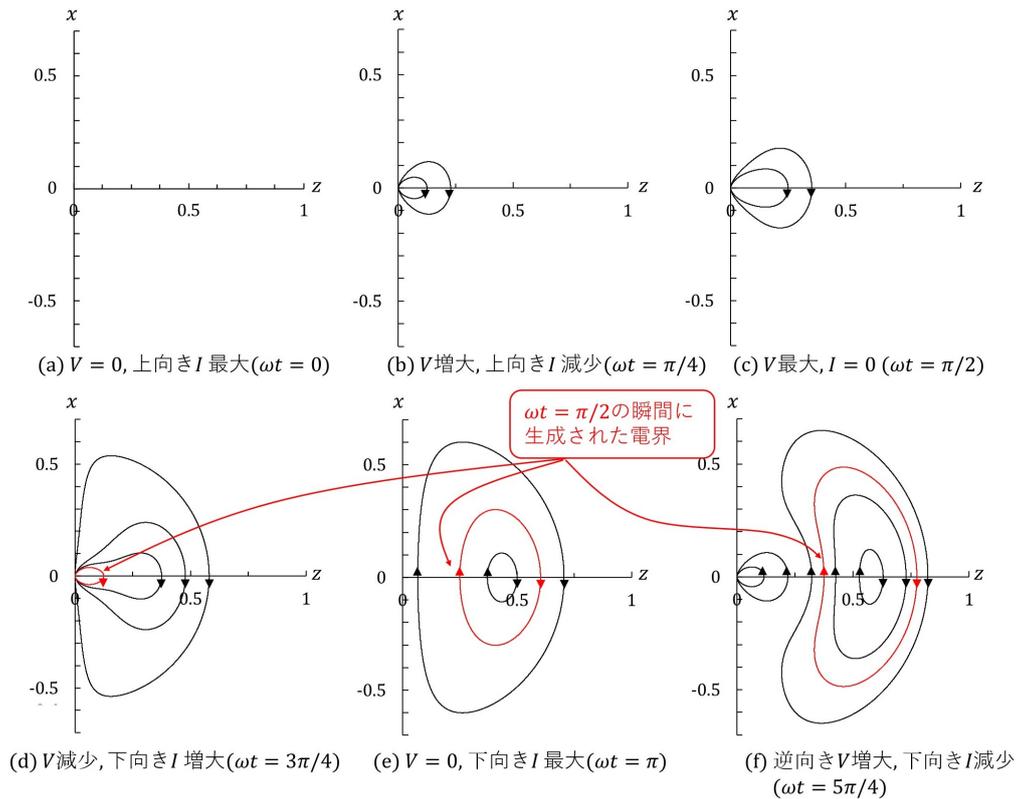


図 4.5: 電流ダイポールによる電界 ((c) V 最大の瞬間にアンテナを出発した電気力線)

4.5.2 電界の成分内訳

図 4.6 は図 4.4(d) の電気力線を放射界と誘導界に分解して示します。図 4.4(a) から位相 ωt が $3\pi/4$ 推移した場合です。極端でわかりやすい事例として、電流ダイポール近傍の電気力線（青色）と、電流ダイポールから離れた電気力線（緑色）について、それらの内訳を示します。同図 (a) は図 4.4(d) と同じ電気力線です。ただし、青色の電気力線を追加してあります。(b) はこの青色の電気力線の内訳です。電流ダイポール近傍の放射界 ((4.3) 式) と誘導界 ((4.5) 式) および全成分の合成界 ((4.1) 式) を示します。横軸、縦軸ともに拡大してあるので注意してください。黒い実線が放射界、青い破線が誘導界、青い実線が合成界です。合成界の力線の向きは誘導界と同じで、放射界と逆向きです。(4.6) 式の誘導界の境界は規格化された z 軸上では $1/2\pi$ です。この図では z 軸の右端です。この境界よりも電流ダイポールに近い領域では誘導界が合成界の主成分であることがわかります。放射界は誘導界に隠されています。

図 4.6(c) は電流ダイポールから離れた電気力線の内訳を示します。同図 (a) の緑色の電気力線です。(c) の横軸、縦軸は (a) と同尺です。黒い実線が放射界、緑の破線が誘導界、緑の実線が合成界です。合成界の力線の向きは放射界と同じで、誘導界と逆向きです。誘導界と放射界の境界点 $1/2\pi$ を z 軸上に記してあります。電流ダイポールから遠方にある場合は、合成界の主成分が放射界であることがわかります。誘導界は減衰していて、放射界に隠されています。

図 4.7 は図 4.4(f) の電気力線の内訳を示します。図 4.4(a) から位相 ωt が $5\pi/4$ 推移した

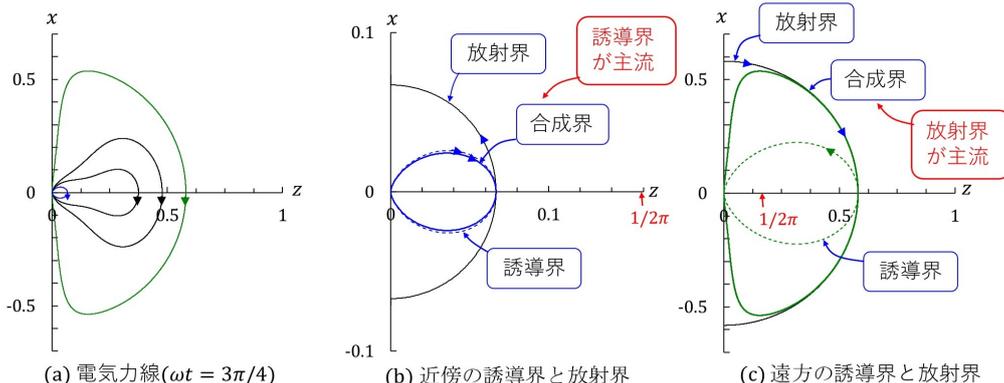


図 4.6: 電流ダイポールによる電界成分 (図 4.4(d) V 減少, 下向き I 増大 ($\omega t = 3\pi/4$))

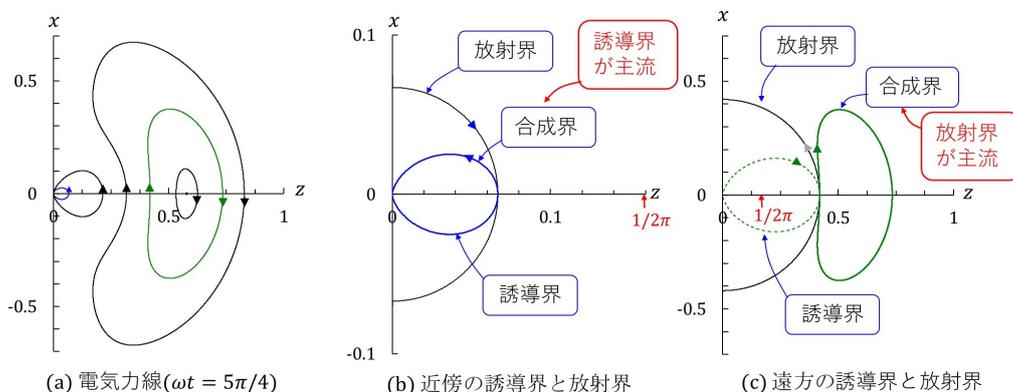


図 4.7: 電流ダイポールによる電界成分 (図 4.4(f) 逆向き V 増大, 下向き I 減少 ($\omega t = 5\pi/4$))

場合です。ただし、図 4.7(a) の青色の電気力線は、図 4.4(f) における電流ダイポールに最も近い電気力線よりも、さらに電流ダイポールに近い例です。図 4.7(b) は (a) の青色の電気力線の内訳を示します。誘導界と合成界はほとんど重なっています。電流ダイポール近傍では誘導界が支配的です。(c) は (a) の緑色の電気力線の内訳を示します。電流ダイポールから遠方にある電気力線では放射界が支配的です。合成界の電気力線は、(4.1) 式の $1/r^2$ 項の影響により、弓形になります。

4.5.3 電界の z 軸上成分内訳

図 4.8 は z 軸上の放射界、誘導界成分の内訳を示します。同図 (a), (b) はそれぞれ図 4.4(d) $\omega t = 3\pi/4$, (f) $\omega t = 5\pi/4$ の場合に対応します。 z 軸上の電界は、(4.9) 式において、 $r = z, \theta = \pi/2$ とすると、

$$\begin{aligned}
 E_z(t, z) &= 0 \\
 E_\theta(t, z) &= \sqrt{\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{k_0^2 z^3}\right)^2 + \left(\frac{1}{k_0 z^2}\right)^2} \cos \left\{ \omega t - k_0 z + \tan^{-1} \left(\frac{\frac{1}{z} - \frac{1}{k_0^2 z^3}}{\frac{1}{k_0 z^2}} \right) \right\}
 \end{aligned}
 \tag{4.10}$$

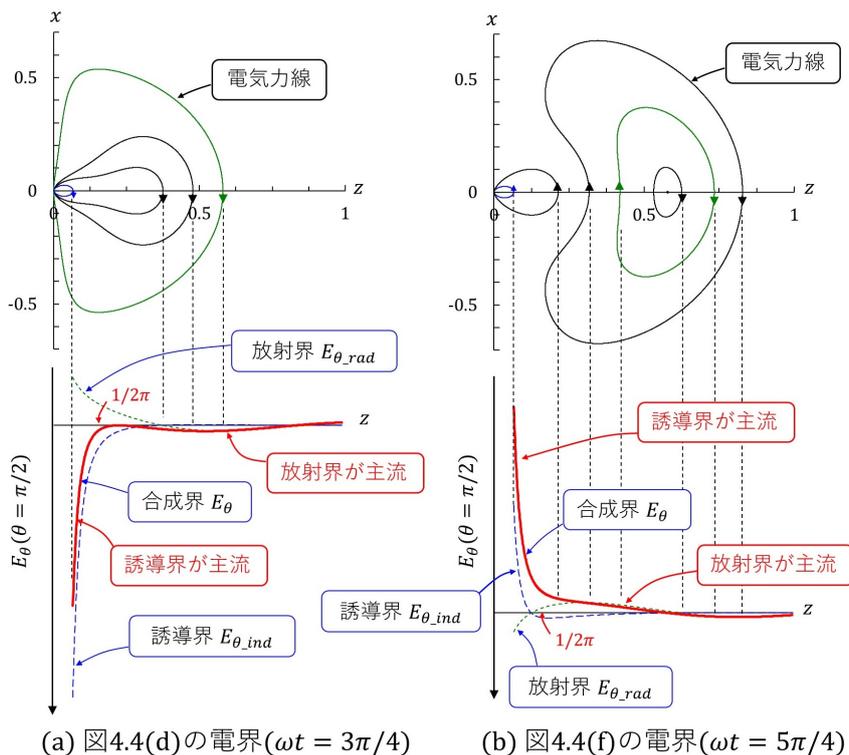


図 4.8: 電流ダイポールによる電界の z 軸上成分内訳

です. θ 方向成分の放射界を $E_{\theta,rad}(t, z)$, 誘導界を $E_{\theta,ind}(t, z)$ とすると

$$\begin{aligned}
 E_{\theta,rad}(t, z) &= \frac{1}{z} \cos \left\{ \omega t - k_0 z + \frac{\pi}{2} \right\} \\
 E_{\theta,ind}(t, z) &= \frac{1}{k_0^2 z^3} \cos \left\{ \omega t - k_0 z - \frac{\pi}{2} \right\}
 \end{aligned}
 \tag{4.11}$$

となります. 図 4.8(a), (b) の下側の図は, 横軸に z をとり, 縦軸は下向きを E_θ としています. 縦軸を反転させているのは, 同図上側の電磁力線における z 軸上の電界ベクトルの向きと合わせるためです. ベクトルが下向きの際にグラフ値も z 軸より下側に表示されます. 放射界と誘導界の境界値 $1/2\pi$ より電流ダイポールに近い側では, 誘導界が放射界より強くなっています. 境界値より遠い側では, 誘導界がとても弱くなり, 合成界は放射界に沿っていることがわかります.

4.5.4 z 軸上の電磁界の時間変化

これまで示してきた図 4.4~4.8 の各図は位相 ωt を固定して, x, z 座標上の電界値を描きました. 次図では x, z 座標を固定し, 位相 ωt を変化させて, 電界および磁界を描きます. 観測地点を固定して, その地点を通過する電界と磁界の位相差を見ます.

z 軸上の電磁界の位相差に注目します. そこで, (4.10) 式より位相情報のみを取り出し

ます。

$$E_{\theta}(t, z) = \cos \left\{ \omega t - k_0 z + \tan^{-1} \left(\frac{\frac{1}{z} - \frac{1}{k_0^2 z^3}}{\frac{1}{k_0 z^2}} \right) \right\}. \quad (4.12)$$

また, (4.1) 式より

$$H_{\varphi}(t, z) = \cos \{ \omega t - k_0 z + \tan^{-1}(k_0 z) \} \quad (4.13)$$

を取り出します。

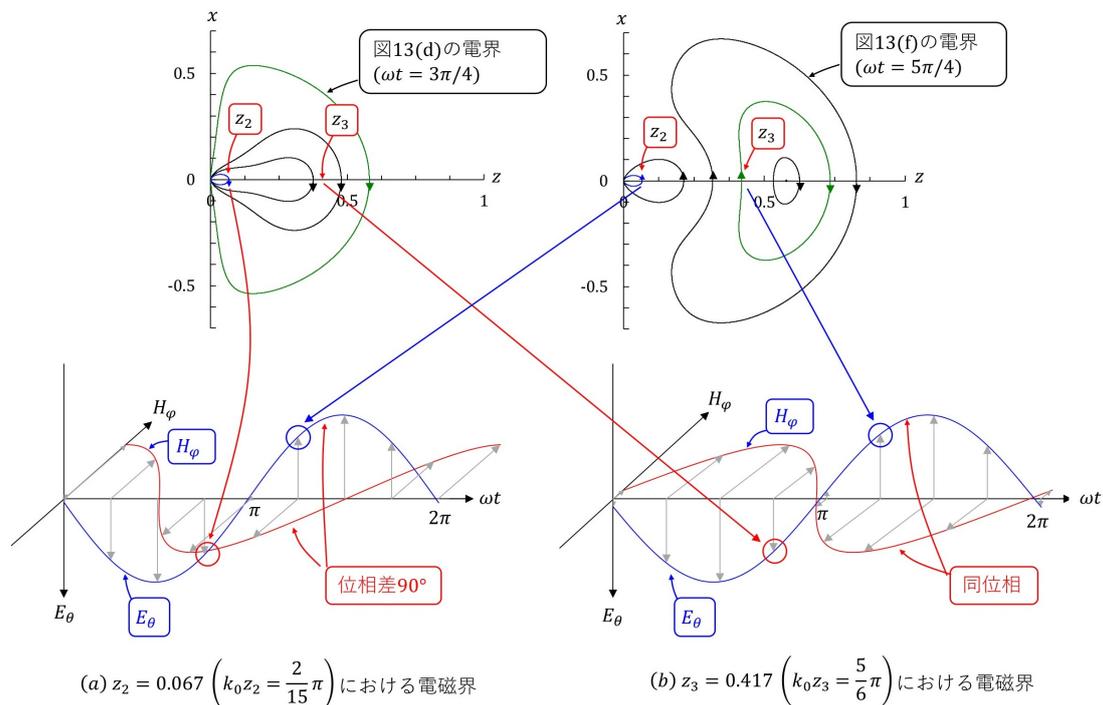


図 4.9: 電流ダイポールによる z 軸上の電磁界の時間変化

図 4.9 は電磁界の観測点を $x = 0$, (a) $z_2 = 0.067(k_0 z_2 = 2\pi/15)$, (b) $z_3 = 0.417(k_0 z_3 = 5\pi/6)$ に固定した場合の, 各座標における電界 E_{θ} , 磁界 H_{φ} の強さの位相変化 (時間変化と読み替えられます。) を示します。同図下が電磁界の位相変化です。 E_{θ}, H_{φ} の軸は, 図 4.1 において, z 軸上 ($\theta = \varphi = \pi/2$ のとき) の電磁界の向きに合わせてあります。青い波形が電界, 赤い波形が磁界です。電界ベクトル, 磁界ベクトルは位相 $\pi/4$ ごとに記入してあります。横軸が位相 ωt です。 $\omega t = 0$ は図 4.4(a) の位相に対応します。 図 4.9 左上には 図 4.4(d) ($\omega t = 3\pi/4$) の電界を示し, 同図右上には 図 4.4(f) ($\omega t = 5\pi/4$) の電界を載せてあります。それぞれの z 軸上に z_2, z_3 の座標を示します。左上図 ($\omega t = 3\pi/4$) の z_2, z_3 での電界との対応電界をそれぞれ赤い矢印で示します。そして, 右上図 ($\omega t = 5\pi/4$) の z_2, z_3 での電界との対応電界をそれぞれ青い矢印で示します。

(a) のように電流ダイポール近傍では, E_{θ}, H_{φ} の位相差はほぼ $\pi/2(90^\circ)$ です。 E_{θ} は H_{φ} より位相が $\pi/2(90^\circ)$ 遅れています。 (b) の遠方では, 位相差は 0 に近い値になっています。

第5章 新たな疑問

5.1 $1/r, 1/r^2$ 項は何によって生成される？

(4.1) 式の E_θ, H_ϕ の $1/r$ の項, E_r, E_θ の $1/r^2$ の項は, 電流ダイポールの何が生成するのでしょうか？

電磁波工学の専門家には常識のことかと思えます。必ずやどこかに記述があるのではと思い, 探しましたが見つけられません。ネット上の記事に, 「理論的に波源から放射電磁界を直接導出することは困難である。」とあります。実際, 電磁波工学の書籍ではベクトルポテンシャル \mathbf{A} を導入して, 波源の電流密度 \mathbf{J} と \mathbf{A} の関係を求め, その後に \mathbf{A} と \mathbf{E}, \mathbf{H} の関係を求める方法が紹介されています。そうではありますが, 自分で考えてみました。

5.2 H_ϕ の $1/r$ の項は \mathbf{J} が押し出す？

本節では, $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$ により H_ϕ が大気中に押し出されることを, 定性的に説明します。(4.1) 式の E_θ, H_ϕ の $1/r$ の項は, 誘導界が支配的となる電流ダイポール近傍でも存在します。距離 r を小さくしていけば, やがて電流ダイポールに達します。文献 [3] によると, 図 4.1 の電流ダイポールは, 図 5.1 のように, 「導体は存在せずに電流が存在する」という思考実験的なものです。(4.1) 式はこの電流ダイポールから導出されています。

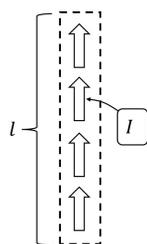


図 5.1: 電流ダイポール

大気との境界面における, 電流ダイポール側の電流密度を \mathbf{J} とします。 \mathbf{J} が存在する場合のアンペアの法則は

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{d\mathbf{D}}{dt} \quad (5.1)$$

です。境界面の電流ダイポール側では

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (5.2)$$

が成立し，大気側では

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{d\mathbf{D}}{dt} \quad (5.3)$$

が成立します．境界面にて

$$\mathbf{J} = \frac{d\mathbf{D}}{dt} \quad (5.4)$$

であるとし，電流（電流ダイポール側では伝導電流，大気中では変位電流）が連続しているとみなします．

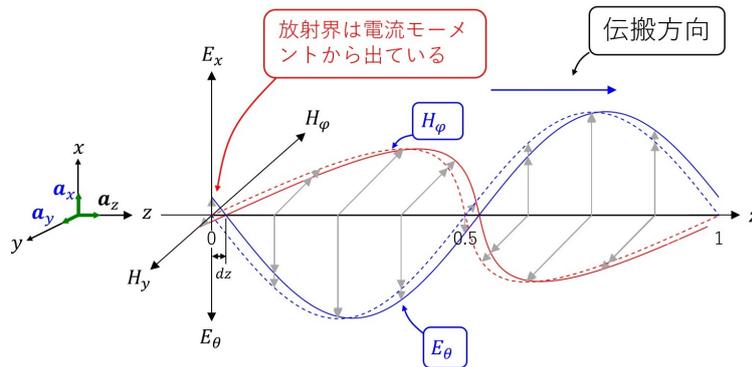


図 5.2: 電流ダイポール近傍の放射界（位相情報のみ, $\omega t = 0$ ）

(4.1) 式より， z 軸上の放射界の位相情報を取り出すと

$$\begin{aligned} E_\theta(t, z) &= \cos\left(\omega t - k_0 z + \frac{\pi}{2}\right) \\ H_\varphi(t, z) &= \cos\left(\omega t - k_0 z + \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned} \quad (5.5)$$

です．図 5.2 の破線は，図 4.4(a) の $\omega t = 0$ の瞬間における z 軸上の放射界を示します．上式に $\omega t = 0$ を代入することで得られます．横軸の単位は 1 波長です． $z = 0$ の地点が電流ダイポールの境界面となります．この瞬間 $E_\theta = H_\varphi = 0$ です．実線は $\omega t = \omega dt$ の瞬間の波形です．放射電磁界は z 軸方向に dz だけ伝搬します． $z = 0$ の地点において

$$\begin{aligned} \frac{dE_\theta}{dt} &< 0 \\ \frac{dH_\varphi}{dt} &< 0 \end{aligned} \quad (5.6)$$

となっています．以降では， $H_x = -H_\theta, H_y = -H_\varphi$ であることに注意してください．従って，

$$\begin{aligned} \frac{dE_x}{dt} &> 0 \\ \frac{dH_y}{dt} &> 0 \end{aligned} \quad (5.7)$$

です．

$\omega t = 0$ の瞬間の電流ダイポールでは上向き電流 I が最大です。簡単のため、電流密度 \mathbf{J} を

$$\mathbf{J} = J_m \cos \omega t \cdot \mathbf{e}_x \quad (5.8)$$

と表し、 $x-y$ 平面上に一様にこの電流が流れているとします。(5.2)式より、

$$\frac{\partial H_y(z=0+, t=0)}{\partial z} = -J_x \quad (5.9)$$

と求められます。

ここで少し強引ですが、図3.3を参考に、 $z=0+$ における磁界 H_y が

$$\frac{dH_y}{dt} > 0 \quad (5.10)$$

であると仮定します。 H_y の由来は置いておいて、とにかく、電流ダイポール表面(の大気中側)に磁界があるとして、その変化分のみ注目します。この増加分 $|dH_y/dt|dt$ を(5.9)式の減少分 $|\partial H_y(z,t)/\partial z|dz$ が相殺すると、 $z=0+$ における磁界は dz の位置に平行移動します。

次は、図3.4の関係を参考にします。 $dH_y/dt > 0$ の仮定により、

$$\frac{\partial E_x(z=0+, t=0)}{\partial z} < 0 \quad (5.11)$$

となります。(5.4)式の仮定より、 $z=0+$ における電界 E_x が

$$\frac{dE_x}{dt} > 0 \quad (5.12)$$

であるので、この増加分 $|dE_x/dt|dt$ を(5.11)式の減少分 $|\partial E_x(z,t)/\partial z|dz$ が相殺することで、 $z=0+$ における電界は dz の位置に平行移動します。

以上は J が $x-y$ 平面上に一様に分布するとした場合の考察です。これを踏まえた仮説は「放射界の磁界項($1/r$ の項)は J が押し出す。押し出す原理は $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$ である。」です。

5.3 放射界 ($1/r$ の項) はファラデーの法則とアンペアの法則を満たす？

放射界、誘導界の相互作用の仕組みを、前節のように定性的に説明することは、残念ながら筆者にはできません。しかたがないので、(4.1)式の項から、ファラデーの法則とアンペアの法則を満たす組み合わせを調べます。そこから、読者には相互作用をイメージする手がかりをつかめていただけるかも知れません。

結論を先に述べます。図5.3は、放射界と誘導界の「相関図」です。 $1/r^2$ の項も含んでいます。(a)は放射界です。電流ダイポールが生成する放射界の相互作用は平面波より複

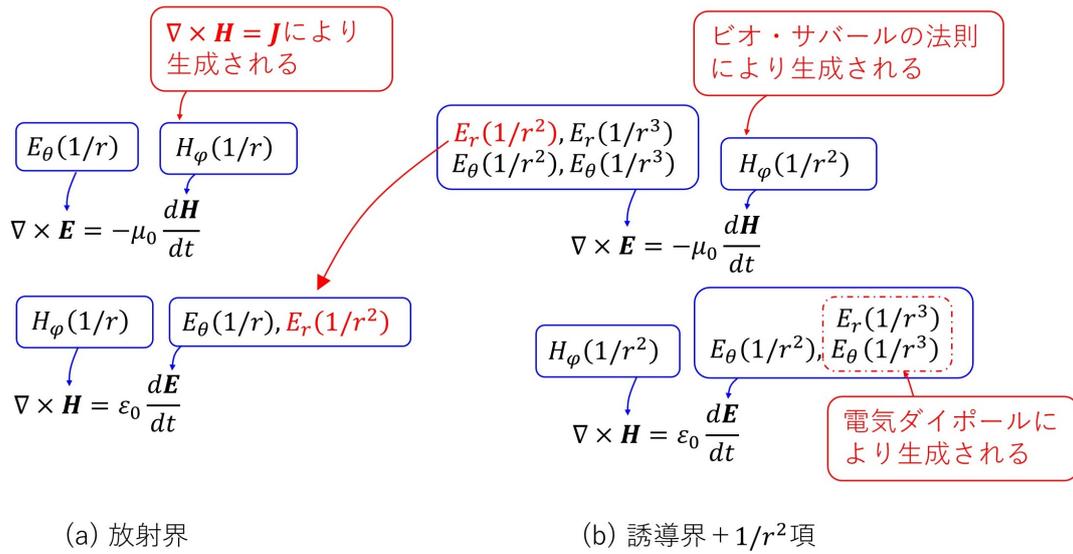


図 5.3: 放射界と誘導界の「相関図」

雑です。放射界の磁界 H_φ の $1/r$ の項 ($H_\varphi(1/r)$ と表記します。) は、 $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$ により大気中に押し出されます (前節の仮説)。そして、ファラデーの法則により $E_\theta(1/r)$ が押し出されます。一方、アンペアの法則は、 $E_\theta(1/r)$ と $H_\varphi(1/r)$ だけでは満たすことができません。 $E_r(1/r^2)$ も必要です。 $E_\theta(1/r)$ と $E_r(1/r^2)$ の時間変化が H_φ を押し出します。

(b) は誘導界と $1/r^2$ 項の相互作用です。ビオ・サバルの法則による磁界 $H_\varphi(1/r^2)$ の時間変化が、電界の各項 ($E_r(1/r^2), E_r(1/r^3), E_\theta(1/r^2), E_\theta(1/r^3)$) を生成します。そして、電気ダイポールによる電界 $E_r(1/r^3), E_\theta(1/r^3)$ と $E_\theta(1/r^2)$ の時間変化が $H_\varphi(1/r^2)$ を生成します。 $E_r(1/r^2)$ の時間変化は、放射界の $H_\varphi(1/r)$ の生成に寄与します。

ファラデーの法則

まず、放射界の電磁界がファラデーの法則を満たすことを確認します。放射界の項を (4.1) 式より抜き出すと、

$$\begin{aligned} E_\theta &= j\omega\mu_0 \frac{Il \sin\theta}{4\pi r} e^{-jk_0 r} \\ H_\varphi &= jk_0 \frac{Il \sin\theta}{4\pi r} e^{-jk_0 r} \end{aligned} \quad (5.13)$$

です。極座標系における curl 演算は、

$$\begin{aligned} (\nabla \times \mathbf{A})_r &= \frac{1}{r \sin\theta} \left(\frac{\partial A_\varphi \sin\theta}{\partial\theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi} \right) \\ (\nabla \times \mathbf{A})_\theta &= \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial A_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial r A_\varphi}{\partial r} \right) \\ (\nabla \times \mathbf{A})_\varphi &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial r A_\theta}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial\theta} \right) \end{aligned} \quad (5.14)$$

と与えられます. $(*)_r, (*)_\theta, (*)_\varphi$ はそれぞれベクトル $*$ の r, θ, φ 方向成分です, (2.2) 式のファラデーの法則は

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{d\mathbf{B}}{dt} \quad (5.15)$$

です. この式に, (5.13) 式と (5.14) 式を代入すると, 左辺は

$$\begin{aligned} (\nabla \times \mathbf{E})_r &= 0 \\ (\nabla \times \mathbf{E})_\theta &= 0 \\ (\nabla \times \mathbf{E})_\varphi &= j\omega\mu_0 \frac{Il}{4\pi r} \frac{\partial r \frac{\sin\theta}{r} e^{-jk_0 r}}{\partial r} \\ &= \omega\mu_0 k_0 \frac{Il}{4\pi r} \sin\theta e^{-jk_0 r} \end{aligned} \quad (5.16)$$

と求まります. (5.15) 式の右辺は

$$\begin{aligned} \left(-\frac{d\mathbf{B}}{dt}\right)_r &= 0 \\ \left(-\frac{d\mathbf{B}}{dt}\right)_\theta &= 0 \\ \left(-\frac{d\mathbf{B}}{dt}\right)_\varphi &= -j\omega\mu_0 H_\varphi \\ &= \omega\mu_0 k_0 \frac{Il}{4\pi r} \sin\theta e^{-jk_0 r} \end{aligned} \quad (5.17)$$

となり, (5.16) 式と一致します.

アンペアの法則

一方, アンペアの法則は

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{d\mathbf{D}}{dt} \quad (5.18)$$

です. (5.13) 式のみでは上式を満たしません. (4.1) の E_r の $1/r^2$ 項も必要です. (5.13) 式に (4.1) の E_r の $1/r^2$ 項を追加すると

$$\begin{aligned} E_r &= \omega\mu_0 \frac{Il}{4\pi} \frac{2\cos\theta}{k_0 r^2} e^{-jk_0 r} \\ E_\theta &= j\omega\mu_0 \frac{Il}{4\pi} \frac{\sin\theta}{r} e^{-jk_0 r} \\ H_\varphi &= jk_0 \frac{Il}{4\pi} \frac{\sin\theta}{r} e^{-jk_0 r} \end{aligned} \quad (5.19)$$

です. これより,

$$\begin{aligned} (\nabla \times \mathbf{H})_r &= jk_0 \frac{Il}{4\pi} \frac{2\cos\theta}{r^2} e^{-jk_0 r} \\ (\nabla \times \mathbf{H})_\theta &= -k_0^2 \frac{Il}{4\pi} \frac{\sin\theta}{r} e^{-jk_0 r} \\ (\nabla \times \mathbf{H})_\varphi &= 0 \end{aligned} \quad (5.20)$$

と得られます。(5.18) 式の右辺は

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{d\mathbf{D}}{dt}\right)_r &= j\omega^2\epsilon_0\mu_0\frac{Il}{4\pi}\frac{2\cos\theta}{k_0r^2}e^{-jk_0r} \\
 &= jk_0\frac{Il}{4\pi}\frac{2\cos\theta}{r^2}e^{-jk_0r} \\
 \left(\frac{d\mathbf{D}}{dt}\right)_\theta &= -\omega^2\epsilon_0\mu_0\frac{Il}{4\pi}\frac{\sin\theta}{r}e^{-jk_0r} \\
 &= -k_0^2\frac{Il}{4\pi}\frac{\sin\theta}{r}e^{-jk_0r} \\
 \left(\frac{d\mathbf{D}}{dt}\right)_\varphi &= 0
 \end{aligned} \tag{5.21}$$

と求められます。ただし、

$$k_0 = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c} = \omega\sqrt{\epsilon_0\mu_0} \tag{5.22}$$

です。(5.20) 式と (5.21) 式は一致します。

5.4 ビオ・サバルの法則による磁界の時間変化により $1/r^2$ 項が誘起される？

ファラデーの法則

E_r, E_θ の $1/r^3$ 項は電気ダイポールによる電界と一致します。そこで、残りの $1/r^2$ 項がビオ・サバルの法則による磁界 $H_\varphi(1/r^2)$ の時間変化により誘起されるならば、これが疑問に対する解答になります。そこで、(4.1) 式の電流ダイポールによる電磁界から $1/r^2$ の項を抜き出すと、

$$\begin{aligned}
 E_r &= \omega\mu_0\frac{Il}{4\pi}\left(\frac{2}{k_0r^2}\right)\cos\theta \cdot e^{-jk_0r} \\
 E_\theta &= \omega\mu_0\frac{Il}{4\pi}\left(\frac{1}{k_0r^2}\right)\sin\theta \cdot e^{-jk_0r} \\
 H_\varphi &= \frac{Il}{4\pi r^2}\sin\theta \cdot e^{-jk_0r}
 \end{aligned} \tag{5.23}$$

です。これらの項はファラデーの法則を満たしているでしょうか？(5.15) 式に上式を代入します。

$$\begin{aligned}
 (\nabla \times \mathbf{E})_\varphi &= \frac{1}{r}\left(\frac{\partial r E_\theta}{\partial r} - \frac{\partial E_r}{\partial \theta}\right) \\
 &= \omega\mu_0\frac{Il}{4\pi r}\left(\frac{\partial}{\partial r}\frac{\sin\theta \cdot e^{-jk_0r}}{k_0r} - \frac{\partial}{\partial \theta}\frac{2\cos\theta \cdot e^{-jk_0r}}{k_0r^2}\right) \\
 &= \omega\mu_0\frac{Il}{4\pi r}\left\{\left(-\frac{1}{k_0r^2} - j\frac{1}{r}\right)\sin\theta \cdot e^{-jk_0r} + \frac{2}{k_0r^2}\sin\theta \cdot e^{-jk_0r}\right\} \\
 &= \omega\mu_0\frac{Il}{4\pi}\left(\frac{1}{k_0r^3} - j\frac{1}{r^2}\right)\sin\theta \cdot e^{-jk_0r}.
 \end{aligned} \tag{5.24}$$

$$\begin{aligned} \left(-\frac{d\mathbf{B}}{dt}\right)_\varphi &= -\mu_0 \frac{dH_\varphi}{dt} \\ &= -j\omega\mu_0 \frac{Il}{4\pi r^2} \sin\theta \cdot e^{-jk_0 r}. \end{aligned} \quad (5.25)$$

(5.24) 式の右辺第2項と (5.25) 式の右辺は一致します。しかし、(5.24) 式の右辺第1項（朱書きの項）が残ってしまいます。(5.23) 式のみではファラデーの法則を満たさないことがわかります。ビオ・サバルの法則による磁界の時間変化により誘起される電界は、 $1/r^2$ 項のみではありません、

($1/r^2$ の項) + ($1/r^3$ の項) がファラデーの法則を満たすはず！

(5.23) 式に (4.1) 式の $1/r^3$ の項を追加すると、

$$\begin{aligned} E_r &= \omega\mu_0 \frac{Il}{4\pi} \left(\frac{2}{k_0 r^2} - j \frac{1}{k_0^2 r^3} \right) \cos\theta \cdot e^{-jk_0 r} \\ E_\theta &= \omega\mu_0 \frac{Il}{4\pi} \left(\frac{1}{k_0 r^2} - j \frac{1}{k_0^2 r^3} \right) \sin\theta \cdot e^{-jk_0 r} \\ H_\varphi &= \frac{Il}{4\pi r^2} \sin\theta \cdot e^{-jk_0 r} \end{aligned} \quad (5.26)$$

です。(5.24) 式に上式の $1/r^3$ の項を代入すると、

$$\begin{aligned} (\nabla \times \mathbf{E})_\varphi &= \omega\mu_0 \frac{Il}{4\pi} \left(\frac{1}{k_0 r^3} - j \frac{1}{r^2} + j \frac{2}{k_0^2 r^4} - \frac{1}{k_0 r^3} - j \frac{2}{k_0^2 r^4} \right) \sin\theta \cdot e^{-jk_0 r} \\ &= -j\omega\mu_0 \frac{Il}{4\pi r^2} \sin\theta \cdot e^{-jk_0 r} \end{aligned} \quad (5.27)$$

となります。追加項による成分を青とマゼンタで色分けしてあります。(5.25) 式と一致しました。

アンペアの法則

(5.26) 式の E_r の $1/r^2$ 項は、(5.19)~(5.21) 式に示したように、放射界の磁界 $H_\varphi(1/r)$ の生成に寄与します。そこで、(5.26) 式から E_r の $1/r^2$ 項を除いた次式が、(5.18) 式のアンペアの法則を満たすことを示します。

$$\begin{aligned} E_r &= \omega\mu_0 \frac{Il}{4\pi} \left(-j \frac{1}{k_0^2 r^3} \right) \cos\theta \cdot e^{-jk_0 r} \\ E_\theta &= \omega\mu_0 \frac{Il}{4\pi} \left(\frac{1}{k_0 r^2} - j \frac{1}{k_0^2 r^3} \right) \sin\theta \cdot e^{-jk_0 r} \\ H_\varphi &= \frac{Il}{4\pi r^2} \sin\theta \cdot e^{-jk_0 r} \end{aligned} \quad (5.28)$$

$$\begin{aligned}
(\nabla \times \mathbf{H})_r &= \frac{Il}{4\pi} \frac{2 \cos \theta}{r^3} e^{-jk_0 r} \\
(\nabla \times \mathbf{H})_\theta &= \frac{Il}{4\pi} \left(j \frac{k_0}{r^2} + \frac{1}{r^3} \right) \sin \theta \cdot e^{-jk_0 r} \\
(\nabla \times \mathbf{H})_\varphi &= 0
\end{aligned} \tag{5.29}$$

と得られます。(5.18) 式の右辺は

$$\begin{aligned}
\left(\frac{d\mathbf{D}}{dt} \right)_r &= \omega^2 \epsilon_0 \mu_0 \frac{Il}{4\pi} \frac{2 \cos \theta}{k_0^2 r^3} e^{-jk_0 r} \\
&= \frac{Il}{4\pi} \frac{2 \cos \theta}{r^2} e^{-jk_0 r} \\
\left(\frac{d\mathbf{D}}{dt} \right)_\theta &= j\omega^2 \epsilon_0 \mu_0 \frac{Il}{4\pi} \left(\frac{1}{k_0 r^2} - j \frac{1}{k_0^2 r^3} \right) \sin \theta \cdot e^{-jk_0 r} \\
&= \frac{Il}{4\pi} \left(j \frac{k_0}{r^2} + \frac{1}{r^3} \right) \sin \theta \cdot e^{-jk_0 r} \\
\left(\frac{d\mathbf{D}}{dt} \right)_\varphi &= 0
\end{aligned} \tag{5.30}$$

と求められます。(5.29) 式と (5.30) 式は一致します。

5.5 第5章のまとめ

本章では、(4.1) 式の $1/r, 1/r^2$ 項が何によって生成されるのかを考察しました。そのまとめが図 5.3 の「相関図」です。しかし、できたことは式を追うことだけでした。本来目指したことは、 $H_\varphi(1/r^2)$ の時間変化により $E_r(1/r^2), E_r(1/r^3), E_\theta(1/r^2), E_\theta(1/r^3)$ が生成される仕組みの理解です。 $E_r(1/r^2)$ の時間変化が放射界の $H_\varphi(1/r)$ の生成に寄与する仕組みの理解です。これらの絶妙な相互作用には、そうなる簡単な自然の仕組みがあるのでと想像します。

索引

アンペアの法則, 4

遠方界, 11

角周波数, 4

球座標, 10

虚数単位, 10

近傍界, 12

時間, 4

思考実験, 15

瞬時値, 11

磁力線, 6

振幅, 4

電荷, 12

電気ダイポール, 12

電気力線, 6

電流ダイポール, 10

電流モーメント, 10

透磁率, 8

波数, 10

波長, 10

半波長ダイポールアンテナ, 5

ビオ・サバールの式, 13

光の速さ, 4

ファラデーの法則, 4

平面波, 4

放射界, 11

誘電率, 8

誘導界, 12

参考文献

- [1] 古橋武「作って実感！電波のサイエンス 第1回 パソコンでAMラジオ放送を聴く」トラ技 Jr., 2015年3月・4月号, pp.28-34, 2015.
- [2] 兵藤申一, 高木堅志郎編「高等学校 物理II 改訂版」啓林館, p.180, 2007.
- [3] 雨宮好文「現代 電磁波工学」オーム社, 1985.
- [4] 電子情報通信学会編, 安達三郎「電磁波工学」コロナ社, 1983.
- [5] 後藤尚久「なっとくする 演習・電磁気学」講談社, 1998

令和4年10月5日

著者

古橋 武

名古屋大学名誉教授

furuhashi.takeshi*

*に @gmail.com を追加してください.